

Initiation à la didactique des mathématiques

Chapitre 1 : Introduction développée

University Badji Mokhtar-Annaba

Septembre 2025

Table des matières

1	Introduction à la didactique des mathématiques	2
1.1	Qu'est-ce que la didactique des mathématiques ?	2
1.1.1	Objets d'étude de la didactique	3
1.2	Spécificité de la didactique des mathématiques	4
1.2.1	Les mathématiques comme objet d'étude particulier	4
1.2.2	Méthodes de recherche spécifiques	5
1.2.3	Problématiques spécifiques	5
1.3	Brève histoire de la discipline	6
1.3.1	Les précurseurs (début XXe siècle - années 1960)	6
1.3.2	La naissance de la didactique française (années 1970-1980)	7
1.3.3	L'école française et ses développements (années 1980-2000)	9
1.3.4	L'internationalisation (années 1990-2010)	9
1.3.5	Évolutions contemporaines (2000-2025)	10
2	Conclusion du chapitre	13
3	Bibliographie du chapitre	13
3.1	Ouvrages fondamentaux	13
3.2	Articles de référence	13
3.3	Ressources contemporaines (2020-2025)	13

1 Introduction à la didactique des mathématiques

La didactique des mathématiques constitue un champ de recherche dynamique et en constante évolution, qui questionne les processus d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Ce premier chapitre pose les fondements conceptuels et historiques nécessaires à la compréhension de cette discipline scientifique.

1.1 Qu'est-ce que la didactique des mathématiques ?

La didactique des mathématiques est une discipline scientifique qui étudie les phénomènes d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Elle s'intéresse aux conditions de transmission et d'appropriation des connaissances mathématiques dans des situations d'enseignement, en analysant les interactions complexes entre les acteurs du système éducatif et les savoirs mathématiques.

Définition

La **didactique des mathématiques** est la science qui étudie, pour un domaine particulier (les mathématiques), les phénomènes d'enseignement et d'apprentissage, en analysant les contenus (les savoirs), et leurs transformations, les relations entre enseignement et apprentissage, en tenant compte des contraintes et des spécificités de ces contenus.

Cette définition met l'accent sur plusieurs aspects fondamentaux :

1. Une approche scientifique

La didactique des mathématiques ne se contente pas de proposer des méthodes d'enseignement, elle développe des théories explicatives des phénomènes observés. Elle utilise des méthodes de recherche rigoureuses pour :

- Observer et décrire les phénomènes d'enseignement et d'apprentissage
- Formuler des hypothèses théoriques
- Expérimenter et valider ces hypothèses
- Construire des modèles explicatifs

2. Une centration sur les contenus mathématiques

Contrairement aux sciences de l'éducation générales, la didactique des mathématiques considère que les contenus mathématiques ne sont pas neutres. Les concepts mathématiques ont leurs propres contraintes, leur histoire, leurs difficultés intrinsèques qui influencent directement les processus d'enseignement et d'apprentissage.

3. Une approche systémique

La didactique étudie les interactions entre trois pôles fondamentaux :

- Le savoir mathématique (avec ses caractéristiques épistémologiques)

- L'élève (avec ses conceptions, ses stratégies, ses difficultés)
- L'enseignant (avec ses connaissances, ses choix pédagogiques, ses contraintes)

4. Une visée transformative

L'objectif final est d'améliorer l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques en proposant des situations didactiques plus efficaces, en formant mieux les enseignants, et en contribuant à l'élaboration de programmes et de ressources pédagogiques.

Exemple

Un didacticien des mathématiques qui s'intéresse à l'apprentissage des fractions ne se contentera pas d'observer que les élèves ont des difficultés. Il analysera :

- L'épistémologie du concept de fraction (comment ce concept s'est-il historiquement construit ?)
- Les obstacles cognitifs spécifiques à ce concept
- Les différentes représentations des fractions (écriture, dessin, droite numérique)
- L'influence des choix didactiques (ordre d'introduction, situations proposées)
- Les stratégies spontanées des élèves et leurs évolutions

1.1.1 Objets d'étude de la didactique

La didactique des mathématiques étudie une grande variété d'objets interconnectés :

Les processus d'apprentissage

- Comment les élèves construisent-ils leurs connaissances mathématiques ?
- Quelles sont les étapes de cette construction ?
- Quels sont les obstacles rencontrés ?
- Comment les conceptions évoluent-elles ?

Les méthodes d'enseignement

- Quelle est l'efficacité des différentes approches pédagogiques ?
- Comment adapter l'enseignement aux caractéristiques des concepts ?
- Quel rôle joue l'environnement didactique ?

La transposition des savoirs

- Comment les savoirs savants deviennent-ils des savoirs enseignés ?
- Quelles transformations subissent-ils ?
- Quels sont les effets de ces transformations ?

Les représentations et conceptions

- Quelles représentations les élèves se font-ils des concepts mathématiques ?

- Comment ces représentations influencent-elles l'apprentissage ?
- Comment les faire évoluer ?

Le rôle du contexte

- Influence du contexte social et culturel
- Impact des situations proposées
- Rôle de l'institution scolaire

1.2 Spécificité de la didactique des mathématiques

La didactique des mathématiques se distingue des autres didactiques disciplinaires et des sciences de l'éducation par plusieurs caractéristiques spécifiques qui découlent de la nature même des mathématiques.

1.2.1 Les mathématiques comme objet d'étude particulier

1. Caractère déductif et formel

Les mathématiques constituent un système déductif où les nouvelles connaissances se déduisent logiquement de connaissances antérieures selon des règles explicites. Cette caractéristique influence profondément :

- L'organisation des programmes (respect des prérequis)
- Les méthodes d'enseignement (place de la démonstration)
- Les difficultés d'apprentissage (ruptures dans la chaîne déductive)

2. Universalité et abstraction

Les objets mathématiques sont abstraits et prétendent à l'universalité, ce qui crée des tensions didactiques spécifiques :

- Comment donner du sens à des objets abstraits ?
- Comment articuler les contextes concrets et la généralité mathématique ?
- Comment gérer le passage du particulier au général ?

3. Multiplicité des représentations

Un concept mathématique peut être représenté de multiples façons (numérique, algébrique, graphique, géométrique). Cette richesse représentative est à la fois une ressource et une source de difficultés :

- Ressource : elle permet différentes approches du même concept
- Difficulté : elle nécessite la coordination entre les différents registres

4. Rapport spécifique à la vérité

En mathématiques, la vérité s'établit par démonstration logique, non par expérience. Cela influence :

- Les critères de validation des connaissances
- Les méthodes d'enseignement
- Les représentations des élèves sur les mathématiques

1.2.2 Méthodes de recherche spécifiques

1. L'ingénierie didactique

La didactique des mathématiques a développé une méthodologie de recherche originale : l'ingénierie didactique. Cette méthode comprend :

- Une analyse épistémologique et didactique a priori
- La conception et l'analyse a priori d'une séquence d'enseignement
- L'expérimentation de cette séquence
- L'analyse a posteriori et la validation

Théorie importante

L'ingénierie didactique selon Artigue

Michèle Artigue a formalisé cette méthodologie en quatre phases :

1. **Analyses préalables** : étude épistémologique, analyse de l'enseignement habituel, analyse des conceptions des élèves
2. **Conception et analyse a priori** : définition des variables didactiques, prévisions sur les comportements
3. **Expérimentation** : mise en œuvre de la séquence conçue
4. **Analyse a posteriori et validation** : confrontation des analyses a priori et a posteriori

2. La théorisation des phénomènes

La didactique des mathématiques a produit des théories spécifiques comme :

- La théorie des situations didactiques (Brousseau)
- La théorie de la transposition didactique (Chevallard)
- La théorie des champs conceptuels (Vergnaud)
- La théorie des registres de représentation sémiotique (Duval)

3. Méthodes d'observation et d'analyse

- **Analyse des productions d'élèves** : étude fine des stratégies et des erreurs
- **Entretiens cliniques** : exploration des conceptions et des raisonnements
- **Observations de classe** : analyse des interactions didactiques
- **Analyses de manuels** : étude de la transposition didactique

1.2.3 Problématiques spécifiques

1. La question du sens

En mathématiques, la question du sens est particulièrement aiguë :

- Comment les élèves donnent-ils du sens aux objets mathématiques abstraits ?

- Quelle est la place des applications et des contextes ?
- Comment articuler sens et rigueur ?
- Quel équilibre entre intuition et formalisation ?

2. La gestion de l'erreur

Les erreurs en mathématiques ont des statuts particuliers :

- Erreurs de calcul vs erreurs conceptuelles
- Erreurs révélatrices de conceptions alternatives
- Erreurs comme obstacles au développement de la pensée mathématique
- Place de l'erreur dans l'apprentissage

3. L'évaluation

L'évaluation en mathématiques pose des questions spécifiques :

- Comment évaluer la compréhension conceptuelle ?
- Quelle place pour les procédures et les algorithmes ?
- Comment évaluer les compétences de résolution de problèmes ?
- Tension entre évaluation formative et sommative

4. La différenciation

- Comment tenir compte de la diversité des élèves ?
- Quelle prise en compte des différences culturelles ?
- Comment gérer l'hétérogénéité des niveaux ?

Théorie importante

Spécificité épistémologique

Les mathématiques entretiennent un rapport particulier à la vérité et à la preuve. Contrairement aux sciences expérimentales où les théories peuvent être réfutées par l'expérience, en mathématiques, la vérité est établie par la démonstration logique. Cette spécificité influence :

- Les méthodes d'enseignement (place de la démonstration)
- Les critères de validation des connaissances
- Les représentations des élèves sur les mathématiques
- Les attentes institutionnelles

1.3 Brève histoire de la discipline

La didactique des mathématiques en tant que discipline scientifique autonome est relativement récente. Son développement s'est fait progressivement au cours du XXe siècle, avec une accélération notable à partir des années 1960-1970.

1.3.1 Les précurseurs (début XXe siècle - années 1960)

Félix Klein (1849-1925)

Repère historique

Mathématicien allemand, Klein est souvent considéré comme un précurseur de la didactique des mathématiques. Dans ses conférences réunies dans "*Mathématiques élémentaires d'un point de vue supérieur*" (1908), il développe l'idée que l'enseignement des mathématiques doit tenir compte de la nature spécifique des concepts mathématiques.

Contributions principales :

- Nécessité d'une formation mathématique approfondie des enseignants
- Importance de relier mathématiques élémentaires et supérieures
- Prise en compte de l'évolution historique des concepts

Henri Poincaré (1854-1912)

Dans "*La Science et l'Hypothèse*" (1902), Poincaré s'interroge sur la nature des mathématiques et leur enseignement :

- Rôle de l'intuition en mathématiques
- Place de la géométrie dans la formation de l'esprit
- Critique de l'enseignement trop formel

Les réformes pédagogiques

- **Le mouvement de l'École nouvelle** (début XXe siècle) : insiste sur l'activité de l'élève et la découverte
- **La réforme des "mathématiques modernes"** (années 1960-1970) : introduction précoce des structures algébriques, accent mis sur la rigueur et l'abstraction

Critique des mathématiques modernes

La réforme des mathématiques modernes, malgré ses intentions louables, a montré ses limites :

- Abstraction trop précoce
- Perte du sens et des applications
- Difficultés d'apprentissage accrues
- Nécessité d'une approche plus scientifique de l'enseignement

1.3.2 La naissance de la didactique française (années 1970-1980)

Guy Brousseau (né en 1933) - Le fondateur

Repère historique

Guy Brousseau est universellement reconnu comme le fondateur de la didactique des mathématiques française. Ses contributions majeures :

- **1970** : Création du premier laboratoire de didactique des mathématiques à Bordeaux
- **Théorie des situations didactiques** : développée tout au long des années 1970-1980
- **Concepts fondamentaux** : milieu, dévolution, contrat didactique, situation a-didactique
- **Prix Felix Klein** (2003) : reconnaissance internationale de ses travaux

Théorie importante

Innovation de Brousseau

Brousseau a révolutionné l'approche de l'enseignement des mathématiques en proposant que l'élève puisse construire ses connaissances en interaction avec un milieu soigneusement aménagé par l'enseignant, sans que celui-ci ait besoin d'explicitier directement les connaissances visées. Cette approche contraste avec les pédagogies traditionnelles centrées sur la transmission directe.

Concepts clés introduits par Brousseau :

- **Situation a-didactique** : situation où l'élève peut agir, formuler, valider sans intervention directe de l'enseignant
- **Milieu** : système antagoniste qui résiste aux actions de l'élève
- **Dévolution** : processus par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'un problème
- **Contrat didactique** : ensemble des attentes réciproques entre enseignant et élève

Yves Chevallard (né en 1946) - La transposition didactique

- **1985** : Publication de "*La transposition didactique*"
- **Concept clé** : analyse du processus de transformation des savoirs savants en savoirs scolaires
- **Développement ultérieur** : théorie anthropologique du didactique (TAD)

Apports de la transposition didactique :

- Analyse des transformations subies par les savoirs
- Mise en évidence des contraintes institutionnelles
- Étude de la "*noosphère*" (sphère où se pensent les contenus d'enseignement)
- Concept de "*vigilance épistémologique*"

1.3.3 L'école française et ses développements (années 1980-2000)

Gérard Vergnaud (1933-2021) - Les champs conceptuels

- **Psychologue et didacticien** : pont entre psychologie cognitive et didactique
- **Théorie des champs conceptuels** : étude de l'apprentissage des concepts dans leur contexte
- **Focus** : structures additives et multiplicatives, algèbre

Concepts clés de Vergnaud :

- **Champ conceptuel** : ensemble de situations, concepts, théorèmes en relation
- **Schème** : organisation invariante de l'action
- **Théorème-en-acte** : proposition tenue pour vraie dans l'action
- **Concept-en-acte** : catégorie de pensée tenue pour pertinente

Raymond Duval (né en 1937) - Les représentations sémiotiques

- **Théorie des registres de représentation** : analyse des différentes représentations des objets mathématiques
- **Concepts clés** : conversion, traitement, coordination des registres
- **Impact** : compréhension des difficultés liées aux changements de registre

Apports de Duval :

- Distinction entre traitement (dans un registre) et conversion (entre registres)
- Importance de la coordination des registres pour la compréhension
- Analyse des difficultés spécifiques aux conversions
- Application à l'algèbre, la géométrie, l'analyse

Régine Douady (1938-2006) - Dialectique outil-objet

- **Concepts** : dialectique outil-objet, changement de cadres
- **Contributions** : didactique de l'analyse, formation des enseignants

Autres figures importantes :

- **Michèle Artigue** : ingénierie didactique, didactique de l'analyse
- **Annie Bessot** : didactique de la géométrie
- **Claude Comiti** : didactique des probabilités
- **François Pluvinage** : didactique de l'algèbre

1.3.4 L'internationalisation (années 1990-2010)

Développement international

- **1976** : Réactivation de l'ICMI (International Commission on Mathematical Instruction)
- **1977** : Premier congrès international PME (Psychology of Mathematics Education)

- **Revues internationales** : Educational Studies in Mathematics, Journal for Research in Mathematics Education, For the Learning of Mathematics

Écoles nationales

École anglo-saxonne :

- Accent sur la psychologie cognitive
- Résolution de problèmes (Polya, Schoenfeld)
- Métacognition et autorégulation
- Représentations multiples (Janvier)

École allemande :

- Développement des "*Didaktik*"
- Approche phénoménologique (Freudenthal)
- "*Realistic Mathematics Education*" (RME)
- Analyse substantielle des contenus

École italienne :

- Approche historico-épistémologique
- Importance de l'histoire des mathématiques
- Développement du concept d'obstacle (Bachelard adapté)

École néerlandaise :

- "*Realistic Mathematics Education*" (RME)
- Mathématisation progressive
- Partir de situations "*réelles*" pour l'élève

1.3.5 Évolutions contemporaines (2000-2025)

Nouveaux enjeux

Technologies numériques :

- Impact des TICE sur l'apprentissage
- Calculatrices graphiques et symboliques
- Logiciels de géométrie dynamique (GeoGebra, Cabri)
- Environnements de programmation (Scratch, Python)
- Plateformes d'apprentissage adaptatif
- Intelligence artificielle en éducation

Évaluations internationales :

- PISA (Programme for International Student Assessment)
- TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study)
- Impact sur les curricula nationaux
- Développement de nouvelles compétences

Formation des enseignants :

- Professionnalisation du métier
- Recherche collaborative enseignants-chercheurs
- "*Lesson Study*" à la japonaise

- Formation continue et développement professionnel

Diversité culturelle :

- Prise en compte des contextes culturels
- Ethnomathématiques
- Multilinguisme en classe de mathématiques
- Équité et inclusion

Développements théoriques récents**Approche documentaire (Gueudet, Trouche) :**

- Étude du travail documentaire des enseignants
- Ressources et genèses documentaires
- Orchestration instrumentale
- Collective work with resources

Extensions théoriques :

- **Théorie des situations didactiques généralisée** : extension à d'autres disciplines
- **Didactique comparée** : comparaison entre les didactiques disciplinaires
- **Approche anthropologique** : développement de la TAD
- **Didactique professionnelle** : formation d'adultes en situation professionnelle

Nouvelles méthodologies :

- Recherches longitudinales à grande échelle
- Méthodes mixtes (quantitatif/qualitatif)
- Analyse des traces numériques
- "*Learning analytics*"
- Neurosciences cognitives et apprentissage

Exemple**Évolution d'un concept : l'introduction des fractions**

- **Années 1960-1970** : approche par les ensembles (partage d'ensembles)
- **Années 1980-1990** : prise en compte des différentes significations (partage, quotient, rapport, opérateur)
- **Années 2000-2010** : importance de la droite numérique et des grandeurs
- **2010-2025** : intégration des outils numériques, visualisation dynamique, approches culturelles diverses

Cette évolution illustre comment la recherche en didactique influence les choix curriculaires et pédagogiques à travers les décennies.

Défis actuels (2025)

- **Intelligence artificielle** : impact sur l'enseignement et l'apprentissage
- **Crise climatique** : intégration des enjeux environnementaux
- **Inégalités** : réduction des écarts de performance
- **Motivation** : redonner du sens aux mathématiques
- **Formation** : préparer les enseignants aux défis contemporains

Institutionnalisation

Aujourd'hui, la didactique des mathématiques est reconnue comme une discipline à part entière avec :

- **Laboratoires de recherche spécialisés** : LDAR (<https://ldar.fr/>), IREM (<https://irems.u-paris.fr/cahiers-de-didactique-2/>), CREM (<https://didactic.care/en/our-catalog/?SEG=100403&n=cream>), etc.
- **Formations universitaires dédiées** : masters, doctorats en didactique des mathématiques
- **Revue scientifique internationale** : RDM <https://revue-rdm.com/ouvrages/didactique-des-mathematiques/>, ESM <https://www.acadlore.com/journals/ESM>, JRME <https://ardm.eu/autres-manifestations-publications/publications/editorial-jrme-guy-brousseau/>, ZDM <https://link.springer.com/journal/11858>, etc.
- **Sociétés savantes** : ARDM (France, <https://ardm.eu/>), PME (international, <https://www.igpme.org/>), ICMI (<https://www.icmihistory.unito.it/pme.php>), etc.
- **Influence sur les politiques éducatives** : programmes scolaires, formation des enseignants
- **Colloques et congrès** : ICME (quadriennal, <https://www.mathunion.org/icmi/icme/icme-international-congress-mathematical-education>), PME (annuel, <https://www.igpme.org/>), EMF (triennal, <https://emf.unige.ch/>)

Perspectives d'avenir

La didactique des mathématiques continue d'évoluer en intégrant :

- Les apports des neurosciences cognitives
- Les possibilités offertes par le numérique
- Les défis de la diversité et de l'inclusion
- Les enjeux de formation tout au long de la vie
- La nécessaire articulation recherche-pratique

Cette brève histoire montre comment la didactique des mathématiques s'est constituée progressivement comme une science autonome, avec ses concepts, ses méthodes et ses applications pratiques pour améliorer l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Elle continue d'évoluer pour répondre aux défis contemporains de l'éducation mathématique.

2 Conclusion du chapitre

Ce premier chapitre a posé les fondements de la didactique des mathématiques en tant que discipline scientifique autonome. Nous avons vu que cette discipline se caractérise par :

- Une approche scientifique des phénomènes d’enseignement et d’apprentissage
- Une prise en compte spécifique de la nature des mathématiques
- Un développement historique riche qui continue d’évoluer
- Des méthodes de recherche adaptées à son objet d’étude
- Une visée transformative pour améliorer l’éducation mathématique

Les chapitres suivants approfondiront les concepts théoriques fondamentaux et les applications pratiques de cette discipline en pleine évolution.

3 Bibliographie du chapitre

3.1 Ouvrages fondamentaux

- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique*. La Pensée Sauvage.
- Vergnaud, G. (1990). *La théorie des champs conceptuels*. Recherches en Didactique des Mathématiques.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Peter Lang.

3.2 Articles de référence

- Artigue, M. (1990). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9.3, 281-308.
- Brousseau, G. (1980). Les échecs électifs en mathématiques. *Revue de Larvngologie*, 101, 107-131.
- Chevallard, Y. (1989). Le concept de rapport au savoir. *Actes du séminaire de didactique des mathématiques et de l’informatique*, 108-124.

3.3 Ressources contemporaines (2020-2025)

- Documents de référence consultés pour ce cours (2025)
- Recherches récentes en didactique des mathématiques
- Apports des technologies numériques à l’enseignement
- Évolutions curriculaires et institutionnelles