

Initiation à la didactique des mathématiques

Chapitre 2 : Concepts Fondamentaux et Théories

University Badji Mokhtar-Annaba

Octobre 2025

Table des matières

1	Introduction aux concepts fondamentaux	3
2	Le triangle didactique	3
2.1	Concept fondamental	3
2.2	Les trois pôles du triangle	4
2.2.1	Le pôle Savoir	4
2.2.2	Le pôle Élève	4
2.2.3	Le pôle Enseignant	5
2.3	Nature systémique du modèle	5
2.4	Applications du modèle triangulaire	5
3	La transposition didactique (Y. Chevallard)	6
3.1	Genèse et définition	6
3.2	Les niveaux de transposition	6
3.2.1	Transposition didactique externe	6
3.2.2	Transposition didactique interne	7
3.3	Phénomènes liés à la transposition	7
3.3.1	Créations didactiques	7
3.3.2	Déformations du savoir	7
3.4	Vigilance épistémologique	8
3.5	Implications pour l'enseignement	8

4	La théorie des situations didactiques (G. Brousseau)	8
4.1	Fondements théoriques	8
4.2	Le concept de milieu	9
4.2.1	Définition du milieu	9
4.2.2	Propriétés d'un bon milieu didactique	9
4.3	Les types de situations	9
4.3.1	Situation d'action	9
4.3.2	Situation de formulation	10
4.3.3	Situation de validation	10
4.3.4	Situation d'institutionnalisation	10
4.4	La dévolution et l'institutionnalisation	11
4.5	Applications pratiques	11
5	Le contrat didactique	11
5.1	Émergence du concept	11
5.2	Caractéristiques du contrat	11
5.2.1	Nature implicite	11
5.2.2	Spécificité au savoir	12
5.3	Clauses typiques du contrat	12
5.3.1	Attentes envers l'élève	12
5.3.2	Attentes envers l'enseignant	12
5.4	Effets pathologiques du contrat	12
5.4.1	Effet Topaze	12
5.4.2	Effet Jourdain	13
5.4.3	Glissement métacognitif	13
5.5	Gestion du contrat didactique	13
5.5.1	Explicitation partielle	13
5.5.2	Renégociation du contrat	14
5.6	Ruptures productives du contrat	14
5.6.1	Nécessité des ruptures	14
5.6.2	Précautions pour les ruptures	14
5.7	Implications pour l'enseignement	14
5.7.1	Formation des enseignants	14
5.7.2	Amélioration des pratiques	15
5.8	Ouvrages fondamentaux	15
5.9	Articles de référence	15
5.10	Ressources contemporaines (2020-2025)	16

1 Introduction aux concepts fondamentaux

Ce deuxième chapitre présente les quatre concepts fondamentaux qui structurent la didactique des mathématiques : le triangle didactique comme modèle systémique de base, la transposition didactique selon Chevallard, la théorie des situations didactiques de Brousseau, et le contrat didactique. Ces concepts constituent les outils théoriques essentiels pour comprendre et analyser les phénomènes d'enseignement-apprentissage des mathématiques.

Théorie importante

Les quatre piliers de la didactique française

La didactique des mathématiques française s'est construite autour de quatre concepts fondamentaux développés principalement dans les années 1970-1980 :

- **Le triangle didactique** : modèle systémique des relations entre savoir, élève et enseignant
- **La transposition didactique** (Chevallard) : analyse des transformations du savoir
- **La théorie des situations** (Brousseau) : modélisation des conditions d'apprentissage
- **Le contrat didactique** : analyse des attentes réciproques en classe

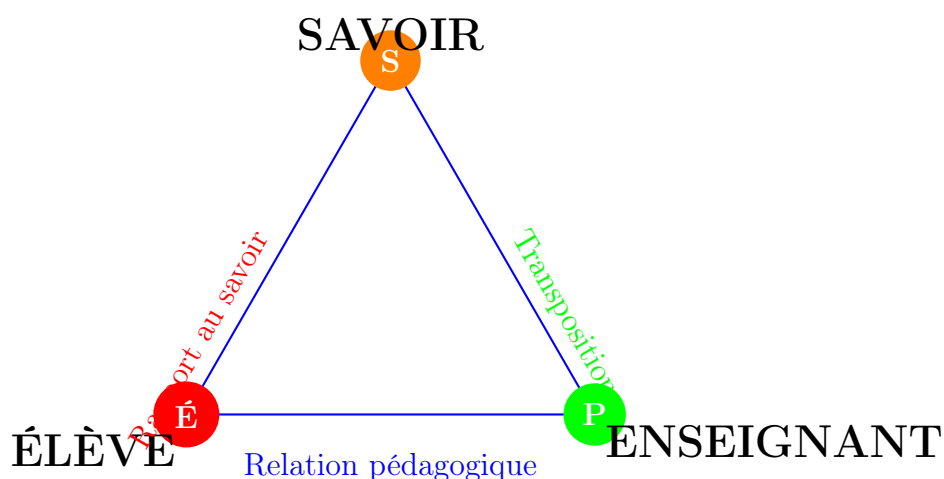
Ces concepts offrent des outils complémentaires pour analyser et comprendre les phénomènes didactiques.

2 Le triangle didactique

2.1 Concept fondamental

Le triangle didactique constitue le modèle de base de la didactique des mathématiques. Il représente de manière systémique les trois pôles essentiels de toute situation d'enseignement-apprentissage et leurs interactions.

Définition 1. Le **triangle didactique** est un modèle ternaire qui représente les relations entre les trois pôles fondamentaux de la situation didactique : le **Savoir**, l'**Élève** et l'**Enseignant**. Ce modèle met en évidence que l'enseignement-apprentissage ne peut être réduit à une relation binaire mais implique nécessairement ces trois composantes en interaction permanente.



2.2 Les trois pôles du triangle

2.2.1 Le pôle Savoir

Le savoir mathématique dans le triangle didactique ne se limite pas aux connaissances factuelles. Il englobe différents niveaux de transformation :

- **Le savoir savant** : connaissances produites par les mathématiciens dans les laboratoires de recherche
- **Le savoir à enseigner** : savoir transformé par l'institution (programmes officiels)
- **Le savoir enseigné** : savoir effectivement transmis en classe par l'enseignant
- **Le savoir appris** : savoir approprié et reconstruit par l'élève

Définition 2. Le théorème de Pythagore à travers les différents savoirs :

- **Savoir savant** : relation métrique dans un triangle rectangle, démonstrations multiples
- **Savoir à enseigner** : programme officiel, formulation standardisée
- **Savoir enseigné** : explications de l'enseignant, exercices choisis
- **Savoir appris** : compréhension personnelle de l'élève, applications maîtrisées

2.2.2 Le pôle Élève

L'élève est conçu comme un acteur actif de son apprentissage qui :

- Possède des conceptions préalables (justes ou erronées)
- Construit ses propres représentations mentales
- Développe des stratégies personnelles de résolution

- Interagit avec le milieu didactique
- Élabore un rapport personnel au savoir mathématique

2.2.3 Le pôle Enseignant

L'enseignant joue le rôle de médiateur entre le savoir et l'élève. Ses fonctions incluent :

- La maîtrise du savoir mathématique dans ses différentes dimensions
- La transposition des contenus savants en contenus enseignables
- La gestion des interactions en classe
- L'évaluation des apprentissages
- L'adaptation aux caractéristiques des élèves

2.3 Nature systémique du modèle

Théorie importante

Le triangle comme système dynamique

Le triangle didactique n'est pas statique. C'est un système dynamique où chaque pôle influence les deux autres de manière permanente et réciproque.

Les caractéristiques de cette approche systémique :

- Chaque modification d'un pôle affecte l'ensemble du système
- Les relations évoluent dans le temps et selon le contexte
- L'équilibre du triangle détermine l'efficacité de l'enseignement
- Les dysfonctionnements peuvent provenir de déséquilibres entre les pôles

2.4 Applications du modèle triangulaire

Le triangle didactique sert d'outil d'analyse pour différents aspects de la pratique enseignante :

- Observer et comprendre les situations de classe
- Identifier les dysfonctionnements didactiques
- Concevoir des séquences d'enseignement cohérentes
- Former les enseignants à une pratique réflexive
- Orienter la recherche en didactique des mathématiques

Exemple 3. Analyse d'une séance sur les fractions :

- **Savoir** : concept de fraction, représentations multiples (partage, quotient, mesure), propriétés

- **Élève** : conceptions sur "partage équitable", difficultés avec l'aspect unitaire, représentations initiales
- **Enseignant** : choix des représentations utilisées, gestion des erreurs, progression didactique

L'analyse triangulaire permet d'identifier les incohérences éventuelles entre ces trois pôles.

3 La transposition didactique (Y. Chevallard)

3.1 Genèse et définition

La théorie de la transposition didactique, développée par Yves Chevallard dans les années 1980, analyse le processus de transformation du savoir pour l'enseignement.

Définition 4. La **transposition didactique** est le travail qui, d'un objet de savoir à enseigner, fait un objet d'enseignement. Elle désigne l'ensemble des transformations subies par un contenu de savoir pour devenir un contenu enseignable, puis effectivement enseigné.

Repère historique

Yves Chevallard et la transposition didactique

Yves Chevallard, mathématicien et didacticien français, a développé la théorie de la transposition didactique dans les années 1980. Son ouvrage *"La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné"* (1985) a marqué un tournant dans la didactique des mathématiques en mettant en lumière les processus de transformation institutionnelle des savoirs.

3.2 Les niveaux de transposition

3.2.1 Transposition didactique externe

C'est le passage du savoir savant au savoir à enseigner, effectué par la **noosphère** (experts, inspecteurs, auteurs de manuels, décideurs).

Transformations principales :

- **Décontextualisation** : effacement du contexte historique de production
- **Dépersonnalisation** : suppression des aspects personnels du découvreur
- **Programmabilité** : organisation séquentielle et progressive des contenus
- **Publicité** : explicitation des savoirs visés dans les programmes
- **Normalisation** : standardisation des formulations et notations

3.2.2 Transposition didactique interne

C'est le passage du savoir à enseigner au savoir enseigné, réalisé par l'enseignant dans sa classe.

Facteurs d'influence :

- Contraintes temporelles et matérielles
- Caractéristiques et niveau des élèves
- Ressources pédagogiques disponibles
- Style pédagogique et compétences de l'enseignant
- Contexte spécifique de la classe

3.3 Phénomènes liés à la transposition

3.3.1 Créations didactiques

Certains objets n'existent que dans l'enseignement et non dans les mathématiques savantes :

- Les "identités remarquables" en algèbre
- La "règle de trois" en proportionnalité
- Les techniques opératoires standardisées en arithmétique
- Les "cas d'égalité des triangles" en géométrie

3.3.2 Déformations du savoir

Exemple 5. Le concept de fonction à travers la transposition :

- **Savoir savant** : relation, correspondance, application entre ensembles
- **Savoir enseigné** : "machine" qui transforme un nombre en un autre, représentation graphique
- **Risque** : réduction à une vision mécaniste, perte du sens relationnel
- **Conséquence** : difficultés pour comprendre les fonctions de plusieurs variables

3.4 Vigilance épistémologique

Théorie importante

Vigilance épistémologique

La transposition est nécessaire mais peut créer des obstacles à l'apprentissage. Chevallard insiste sur la nécessité d'une **vigilance épistémologique** pour préserver l'essence du savoir mathématique tout en le rendant accessible.

Questions pour l'enseignant :

- Le savoir transposé garde-t-il son sens mathématique originel ?
- Les simplifications créent-elles de nouveaux obstacles ?
- Les élèves peuvent-ils reconstruire le savoir savant à partir du savoir enseigné ?
- Quelles déformations sont acceptables et lesquelles sont problématiques ?

3.5 Implications pour l'enseignement

La théorie de la transposition didactique implique pour l'enseignant :

- Une formation disciplinaire solide et approfondie
- Une réflexion critique sur les choix de transposition
- Une attention aux effets non voulus des transformations
- Une articulation consciente entre les différents niveaux de savoir
- Une adaptation raisonnée aux contraintes institutionnelles

4 La théorie des situations didactiques (G. Brousseau)

4.1 Fondements théoriques

Guy Brousseau a développé dans les années 1970-1980 une théorie qui modélise les conditions d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques.

Définition 6. Une **situation didactique** est un ensemble de relations établies explicitement ou implicitement entre un élève ou un groupe d'élèves, un certain milieu (comprenant éventuellement des instruments ou des objets) et un système éducatif (représenté par l'enseignant) pour que ces élèves acquièrent un savoir constitué ou en voie de constitution.

Repère historique

Guy Brousseau et la théorie des situations

Guy Brousseau (né en 1933) est considéré comme le fondateur de la didactique des mathématiques française. Ses travaux sur la théorie des situations didactiques, développés à partir des années 1970, ont profondément renouvelé l'approche de l'enseignement des mathématiques. Son ouvrage majeur "*Théorie des situations didactiques*" (1998) synthétise plusieurs décennies de recherche.

4.2 Le concept de milieu

4.2.1 Définition du milieu

Définition 7. Le **milieu** est ce qui agit sur l'élève ou ce sur quoi l'élève agit. Il est dépourvu d'intentions didactiques explicites. Le milieu fournit des rétroactions qui permettent à l'élève de valider ou d'invalidier ses stratégies.

Composantes du milieu :

- Objets matériels (instruments, supports, outils)
- Contraintes et règles du problème
- Rétroactions du système (réponses aux actions)
- Connaissances mobilisables par l'élève
- Environnement physique et symbolique

4.2.2 Propriétés d'un bon milieu didactique

Un milieu didactique efficace doit posséder les caractéristiques suivantes :

- **Antagoniste** : offrir une résistance à l'élève, nécessiter une adaptation
- **Rétroactif** : fournir des informations claires sur les actions entreprises
- **Adapté** : correspondre au niveau de développement de l'élève
- **Évolutif** : permettre des adaptations et des généralisations
- **Fertile** : engendrer de nouvelles questions et problèmes

4.3 Les types de situations

4.3.1 Situation d'action

Définition 8. Dans une **situation d'action**, l'élève agit sur le milieu pour résoudre un problème. Il développe des stratégies sans nécessairement les expliciter. La connaissance est d'abord "en acte".

Caractéristiques :

- Connaissance implicite en acte
- Feedback immédiat du milieu
- Adaptation progressive des stratégies
- Émergence de connaissances nouvelles
- Apprentissage par essai-erreur

4.3.2 Situation de formulation

Définition 9. Dans une **situation de formulation**, l'élève doit communiquer une information à un autre élève pour que celui-ci puisse agir efficacement. Cette situation favorise l'explicitation des connaissances.

Enjeux :

- Explicitation des connaissances implicites
- Émergence du langage mathématique
- Précision et non-ambiguïté des communications
- Construction collective du savoir
- Développement des capacités d'expression

4.3.3 Situation de validation

Définition 10. Dans une **situation de validation**, l'élève doit prouver la validité de son assertion à un autre élève qui joue le rôle d'opposant. Cette situation développe l'esprit critique et le raisonnement déductif.

Processus :

- Énoncé d'une assertion ou d'une solution
- Mise en doute systématique par l'opposant
- Recherche de preuves et d'arguments
- Acceptation ou rejet argumenté
- Construction collective de critères de validité

4.3.4 Situation d'institutionnalisation

Définition 11. La **situation d'institutionnalisation** est le moment où l'enseignant identifie et formalise le savoir qui a émergé des situations précédentes. Elle donne un statut officiel aux connaissances construites.

Fonctions :

- Reconnaissance officielle du savoir
- Décontextualisation et généralisation
- Liens avec le savoir institutionnel
- Mémorisation et réutilisation
- Intégration dans la culture mathématique

4.4 La dévolution et l'institutionnalisation

Définition 12. La **dévolution** est l'acte par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'une situation d'apprentissage ou d'un problème. C'est le processus qui permet le passage d'une situation didactique à une situation a-didactique.

Conditions de réussite de la dévolution :

- L'élève doit comprendre l'enjeu et accepter le problème
- La situation doit être à sa portée mais présentant un défi
- L'élève doit avoir les moyens d'agir sur le milieu
- L'enseignant doit résister à la tentation d'aider trop tôt
- Le contrat didactique doit autoriser l'autonomie

4.5 Applications pratiques

Exemple 13. Séquence pour découvrir la formule de l'aire du rectangle :

- **Action** : Pavage avec des carrés unités, tâtonnements, comparaisons
- **Formulation** : "Pour calculer l'aire, on multiplie la longueur par la largeur", échanges entre élèves
- **Validation** : Vérification sur différents rectangles, justification par le dénombrement, argumentation
- **Institutionnalisation** : "L'aire d'un rectangle est égale au produit de ses dimensions", notation conventionnelle, généralisation

5 Le contrat didactique

5.1 Émergence du concept

Le concept de contrat didactique, développé par Guy Brousseau, émerge de l'observation de dysfonctionnements récurrents dans les situations d'enseignement.

Définition 14. Le **contrat didactique** est l'ensemble des comportements de l'enseignant qui sont attendus de l'élève, et l'ensemble des comportements de l'élève qui sont attendus de l'enseignant. Ces attentes sont le plus souvent implicites et s'établissent par la pratique conjointe.

5.2 Caractéristiques du contrat

5.2.1 Nature implicite

Le contrat didactique fonctionne largement de manière implicite :

- Les règles ne sont pas énoncées explicitement
- Elles s'établissent par l'usage et la répétition
- Chacun devine ce que l'autre attend
- Les violations créent des tensions et des malentendus
- L'efficacité dépend de la clarté des attentes mutuelles

5.2.2 Spécificité au savoir

Le contrat varie selon le contexte mathématique :

- Le domaine mathématique enseigné (algèbre, géométrie, etc.)
- Le niveau de la classe et l'âge des élèves
- Le type de tâche proposée (exercice, problème, recherche)
- L'objectif visé (découverte, entraînement, évaluation)
- Les habitudes de l'enseignant et de la classe

5.3 Clauses typiques du contrat

5.3.1 Attentes envers l'élève

- **Recherche personnelle** : chercher avant de demander de l'aide
- **Utilisation des acquis** : mobiliser les connaissances enseignées
- **Justification** : expliquer ses démarches et ses réponses
- **Acceptation de l'erreur** : considérer l'erreur comme normale dans l'apprentissage
- **Respect des consignes** : suivre les indications données
- **Participation active** : s'engager dans les activités proposées

5.3.2 Attentes envers l'enseignant

- **Clarté** : énoncés compréhensibles et non ambigus
- **Faisabilité** : problèmes à la portée des élèves
- **Aide adaptée** : intervention en cas de blocage réel
- **Évaluation juste** : critères explicites et équitables
- **Respect du rythme** : adaptation aux besoins des élèves
- **Explication** : clarification des attentes et des objectifs

5.4 Effets pathologiques du contrat

5.4.1 Effet Topaze

Définition 15. L'effet **Topaze** se produit quand l'enseignant, devant les difficultés de l'élève, lui fournit les indices qui lui permettent de réussir sans comprendre.

L'élève donne la réponse attendue sans avoir construit le savoir visé.

Exemple 16. Manifestation de l'effet Topaze :

Enseignant : "Quel théorème commence par py... et finit par ...thagore?"
L'élève répond "Pythagore" sans mobiliser ses connaissances géométriques ni comprendre quand utiliser ce théorème.

5.4.2 Effet Jourdain

Définition 17. L'effet Jourdain consiste à feindre de reconnaître la manifestation du savoir visé dans des comportements de l'élève qui relèvent d'autres causes. L'enseignant attribue à l'élève une compréhension qu'il n'a pas.

Manifestations :

- Surinterpréter une réponse fortuite d'élève
- Voir de la compréhension où il n'y a que reproduction
- Valider des réponses partiellement correctes sans vérification
- Attribuer du sens à des procédures mécaniques

5.4.3 Glissement métacognitif

Définition 18. Le glissement métacognitif se produit quand l'enseignant, ne pouvant enseigner la connaissance visée, enseigne autre chose (souvent une méthode) sous l'apparence de cette connaissance.

Exemple 19. Exemple de glissement métacognitif :

Au lieu d'enseigner le concept de fonction et ses différentes représentations, l'enseignant se contente d'enseigner la méthode mécanique pour tracer sa courbe représentative sans développer la compréhension conceptuelle.

5.5 Gestion du contrat didactique

5.5.1 Explicitation partielle

Certaines clauses du contrat peuvent et doivent être explicites :

- Règles de participation et de communication en classe
- Critères d'évaluation et attentes de précision
- Attentes méthodologiques et de présentation
- Normes de travail et de collaboration
- Objectifs d'apprentissage visés

5.5.2 Renégociation du contrat

Le contrat évolue et doit être renégocié régulièrement :

- Lors de changements d'objectifs ou de méthodes
- Face à des difficultés récurrentes des élèves
- Pour introduire de nouvelles modalités de travail
- En fonction de l'évolution et de la maturation des élèves
- Lors du passage à un nouveau cycle d'enseignement

5.6 Ruptures productives du contrat

5.6.1 Nécessité des ruptures

Pour faire évoluer les apprentissages, l'enseignant doit parfois rompre le contrat habituel :

- Proposer des problèmes sans méthode de résolution connue
- Accepter et valoriser plusieurs stratégies de résolution
- Laisser les élèves dans l'incertitude temporairement
- Valoriser l'erreur comme source d'apprentissage
- Introduire des situations complexes nécessitant des adaptations

5.6.2 Précautions pour les ruptures

Les ruptures de contrat doivent être préparées et accompagnées :

- Expliquer les nouvelles règles du jeu et leurs objectifs
- Rassurer les élèves sur les attentes et les critères d'évaluation
- Accompagner les élèves dans l'adaptation aux nouvelles exigences
- Évaluer régulièrement les effets de la rupture sur les apprentissages
- Maintenir un cadre sécurisant malgré les changements

5.7 Implications pour l'enseignement

5.7.1 Formation des enseignants

La connaissance du contrat didactique implique pour la formation :

- Prise de conscience des attentes implicites portées sur les élèves
- Réflexion critique sur ses propres pratiques et leurs effets
- Développement d'une vigilance didactique permanente
- Capacité à gérer les ruptures de contrat de manière constructive
- Maîtrise des techniques d'explicitation des attentes

5.7.2 Amélioration des pratiques

Pour améliorer l'efficacité de son enseignement :

- Expliciter progressivement les attentes importantes
- Varier les types de situations et les modalités de travail
- Accepter et gérer l'incertitude pédagogique
- Développer progressivement l'autonomie des élèves
- Établir un climat de confiance propice aux prises de risque

Conclusion du chapitre

Ces quatre concepts fondamentaux - triangle didactique, transposition didactique, théorie des situations didactiques et contrat didactique - constituent l'armature théorique de la didactique des mathématiques. Ils offrent des outils complémentaires pour :

- **Analyser** les phénomènes d'enseignement-apprentissage dans leur complexité
- **Comprendre** les difficultés rencontrées par les élèves et les enseignants
- **Concevoir** des situations didactiques efficaces et adaptées
- **Former** les enseignants à une pratique réflexive et éclairée
- **Améliorer** la qualité de l'éducation mathématique pour tous les élèves

Leur maîtrise est essentielle pour tout professionnel de l'enseignement des mathématiques soucieux de fonder ses pratiques sur des bases scientifiques solides et de contribuer au développement de la pensée mathématique chez les élèves.

Bibliographie du chapitre

5.8 Ouvrages fondamentaux

- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique*. La Pensée Sauvage.
- Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 309-336.

5.9 Articles de référence

- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73-112.

- Johsua, S., & Dupin, J.-J. (1993). *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*. Paris : PUF.
- Margolinas, C. (1993). De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage.

5.10 Ressources contemporaines (2020-2025)

- Recherches récentes sur le contrat didactique et ses évolutions
- Applications des concepts fondamentaux aux technologies numériques
- Évolutions de la transposition didactique à l'ère du numérique
- Actualisation de la théorie des situations pour les défis contemporains