Initiation à la didactique des mathématiques

Chapitre 3 : L'erreur et les obstacles en mathématiques

University Badji Mokhtar-Annaba

Novembre 2025

Table des matières

1 Introduction : vers une nouvelle conception de l'erreur

1.1 Évolution du regard sur l'erreur

Dans les approches traditionnelles de l'enseignement, l'erreur était généralement considérée comme :

- Un signe d'ignorance ou de manque de compréhension
- Un échec à éviter absolument
- Un détour inutile dans l'apprentissage
- Une preuve de l'incapacité de l'élève

Cette conception de l'erreur, héritée d'une vision behavioriste de l'apprentissage, a été profondément transformée par les recherches en didactique des mathématiques depuis les années 1970-1980.

Définition

[L'erreur en didactique] L'erreur en didactique des mathématiques n'est pas un simple accident mais un **signe révélateur** des conceptions de l'élève et de la nature des obstacles à l'apprentissage.

1.2 Les travaux pionniers

Les recherches fondatrices sur l'erreur en didactique sont menées par plusieurs chercheurs clés :

- **Guy Brousseau** : Théorie des situations didactiques et obstacles épistémologiques
- **Jean-Pierre Astolfi** : L'erreur comme outil d'enseignement
- **Gérard Vergnaud** : Théorie des champs conceptuels et erreurs conceptuelles
- **Michèle Artigue** : Ingénierie didactique et gestion des erreurs

1.3 Le changement de paradigme

Le nouveau regard sur l'erreur repose sur plusieurs principes fondamentaux :

Remarque 1.1 (Les nouveaux principes concernant l'erreur)

1. ***L'erreur comme constitutive du sens***
   - *L'erreur révèle le domaine de validité des connaissances antérieures et les limites de leur applicabilité.*

2. ***L'erreur comme indicateur d'obstacles***
   — *Les erreurs récurrentes signalent la présence d'obstacles épistémologiques ou didactiques.*
3. ***L'erreur comme ressource didactique***
   — *L'erreur peut être utilisée comme levier pour construire de nouvelles connaissances.*
4. ***L'erreur comme outil d'évaluation***
   — *L'analyse des erreurs permet de diagnostiquer les conceptions et les difficultés de compréhension.*

2 Les obstacles épistémologiques

2.1 Origine conceptuelle : Bachelard et la philosophie des sciences

Le concept d'obstacle épistémologique provient de la philosophie des sciences, notamment des travaux de Gaston Bachelard sur la formation de l'esprit scientifique.

Définition

[Obstacle épistémologique] Un **obstacle épistémologique** est une connaissance qui, ayant été utile dans un certain contexte, devient obstacle dans un nouveau contexte. Il est constitutif du sens de la connaissance à acquérir.

2.2 Adaptation du concept par Brousseau

Guy Brousseau adapte le concept d'obstacle épistémologique à la didactique des mathématiques dans les années 1970-1980.

Remarque 2.1 (Caractéristiques des obstacles épistémologiques)

1. ***Résistances à l'abandon***
   — *Les obstacles ne disparaissent pas facilement car ils sont constitutifs de l'identité cognitive de l'élève.*
2. ***Créations fonctionnelles***
   — *Les obstacles rendent des services dans un certain domaine, ce qui les rend difficiles à abandonner.*
3. ***Universalité relative***

- *Ils se manifestent chez tous les élèves, mais à des moments différents.*

4. ***Hiérarchisation***
   - *Certains obstacles sont plus difficiles à surmonter que d'autres.*

2.3 Typologie des obstacles en mathématiques

Définition

[Obstacles épistémologiques] Obstacles liés à la nature même du savoir mathématique et à son histoire. Ils correspondent aux difficultés historiques rencontrées lors du développement des concepts mathématiques.

Définition

[Obstacles didactiques] Obstacles créés par l'enseignement lui-même, dus aux choix pédagogiques, à l'organisation des séquences, à la progression choisie.

Définition

[Obstacles psychogénétiques] Obstacles liés au développement cognitif de l'élève et à ses modes de fonctionnement mental.

2.4 Exemples d'obstacles épistémologiques en mathématiques

Exemple

[L'obstacle de l'addition et de la soustraction] L'apprentissage de l'addition et de la soustraction comme opérations opposées crée un obstacle pour la compréhension de la division, où la soustraction répétée ne correspond pas à l'inverse de l'addition.

Exemple

[L'obstacle du continu géométrique] La conception intuitive du continu géométrique (où "deux points se touchent") constitue un obstacle pour la compréhension de la structure discrète des naturels.

Exemple

[L'obstacle de la proportionnalité] L'application mécanique de la règle de trois dans des contextes non proportionnels constitue un obstacle à la compréhension de la non-proportionnalité.

Exemple

[L'obstacle de la limite] L'intuition de la continuité (si $f(x) \to L$ alors $f(x) = L$) constitue un obstacle pour la compréhension formelle du concept de limite.

2.5 Processus de dépassement des obstacles

Remarque 2.2 (Conditions pour dépasser un obstacle)

1. ***Rupture didactique***
   — *Il faut organiser des situations qui nécessitent l'abandon de la connaissance et la construction d'une nouvelle.*
2. ***Contradiction féconde***
   — *Créer des situations qui rendent manifeste l'insuffisance des connaissances antérieures.*
3. ***Rupture épistémologique***
   — *Faire reconnaître par l'élève la légitimité et les limites de ses connaissances antérieures.*
4. ***Reconstruction***
   — *Organiser les conditions pour que l'élève reconstruise les connaissances dans le nouveau domaine.*

3 Analyse d'erreurs types en mathématiques

3.1 Méthodologie d'analyse d'erreurs

L'analyse d'erreurs en didactique des mathématiques suit une méthodologie rigoureuse qui vise à :

— **Caractériser** l'erreur : identifier sa nature, sa localisation, son origine
— **Expliquer** l'erreur : comprendre les processus cognitifs qui l'ont générée
— **Diagnostiquer** l'erreur : identifier les obstacles sous-jacents
— **Proposer** des remédiations : concevoir des interventions adaptées

3.2 Typologies d'erreurs

Définition

[Erreurs conceptuelles] Erreurs dues à une conception incorrecte du concept mathématique. L'élève comprend une opération mais applique un autre concept que celui qui devrait être utilisé.

Définition

[Erreurs procédurales] Erreurs dans l'application de procédures ou d'algorithmes. L'élève maîtrise le concept mais ne sait pas l'appliquer correctement.

Définition

[Erreurs de représentation] Erreurs liées à la difficulté de représentation mentale ou graphique des objets mathématiques.

Définition

[Erreurs de transfert] Erreurs dues à l'application incorrecte de connaissances acquises dans un contexte nouveau.

Remarque 3.1 (Interactions entre types d'erreurs) *Les différents types d'erreurs peuvent s'imbriquer et se renforcer mutuellement. Une erreur conceptuelle peut générer des erreurs procédurales, et vice versa.*

3.3 Exemples d'erreurs types selon les domaines

Exemple

[En arithmétique - Les décimaux] **Erreur type** : Comparer 4,3 et 4,205 en disant $4{,}3 < 4{,}205$ car $3 < 205$

Analyse :

- **Conceptuel** : Confusion entre comparaison de nombres entiers et de nombres décimaux
- **Procédural** : Application incorrecte de la règle de comparaison
- **Origine** : Extension abusive de la règle des nombres naturels aux nombres décimaux

Remédiation : Analyser la structure positionnelle des nombres décimaux et utiliser la métaphore de l'argent (4,30€ et 4,205€)

Exemple

[En algèbre - Équations] **Erreur type** : Résoudre $2x + 3 = 8$ en disant $x = 8 - 2 + 3$

Analyse :

— **Conceptuel** : Confusion entre simplification et équilibrage dans les équations

— **Procédural** : Application incorrecte des règles de résolution

— **Origine** : Conceptions intuitives des opérations comme "déplacement" plutôt que comme transformation

Remédiation : Utiliser la métaphore de la balance et la notion d'opérations inverses

Exemple

[En géométrie - Symétrie] **Erreur type** : Dire qu'un triangle rectangle isocèle a un axe de symétrie

Analyse :

— **Conceptuel** : Confusion entre propriétés du triangle rectangle et du triangle isocèle

— **Représentation** : Difficulté à visualiser les transformations

— **Origine** : Conceptions mélangées de plusieurs propriétés géométriques

Remédiation : Travail sur les définitions et les propriétés, pliages et retournements concrets

Exemple

[En analyse - Limites] **Erreur type** : Dire que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ n'existe pas car on divise par 0

Analyse :

— **Conceptuel** : Confusion entre division par 0 (interdit) et limite (processus)

— **Procédural** : Application incorrecte du principe de substitution

— **Origine** : Obstacle épistémologique lié à la structure ensembliste du continu

Remédiation : Travail sur l'approche intuitive de la limite via les suites et les fonctions

3.4 Outils pour l'analyse d'erreurs

Remarque 3.2 (Grille d'analyse d'erreurs)

1. ***Étape 1 : Caractérisation***
   — *Nature de l'erreur : Conceptuelle ? Procédurale ? De représentation ?*
   — *Localisation : À quel moment de la résolution l'erreur se produit-elle ?*
   — *Fréquence : L'erreur est-elle isolée ou récurrente ?*
2. ***Étape 2 : Génération***
   — *Origine cognitive : Comment l'erreur a-t-elle été produite ?*
   — *Cause immédiate : Quelle connaissance a été mal appliquée ?*
   — *Cause profonde : Quel obstacle sous-jacent ?*
3. ***Étape 3 : Diagnostic***
   — *Type d'obstacle : Épistémologique ? Didactique ? Psychogénétique ?*
   — *Niveau d'apprentissage : Erreur de base ou de transfert ?*
   — *Diagnostic différentiel : Confusion avec d'autres concepts ?*

3.5 De l'analyse à la remédiation

Exemple

[Approche de remédiation : le cas des fractions] **Problème identifié** : Les élèves confondent $\frac{3}{4}$ et $\frac{4}{3}$ ou croient que $\frac{3}{4} > \frac{4}{3}$

Analyse :

— **Erreur** : Conceptions mélangées de numérateur et dénominateur
— **Obstacle** : Difficulté de représentation fractionnaire
— **Origine** : Obstacle épistémologique lié au passage du tout-aux parties

Remédiation progressive :

1. Rappel du sens concret des fractions (partage en parts égales)
2. Utilisation de matériel concret (carrés divisés, objets, jetons)
3. Comparaison systématique avec les naturels ($3/4 = 0{,}75$)
4. Situations-problèmes nécessitant la comparaison
5. Institutionnalisation des procédures de comparaison

3.6 Erreurs et obstacles : une approche intégrée

Remarque 3.3 (Interaction erreurs/obstacles) *Les erreurs ponctuelles révèlent souvent la présence d'obstacles sous-jacents plus profonds. Une approche didactique* *efficace doit prendre en compte cette dimension temporelle : l'erreur immédiate manifeste l'obstacle persistant.*

Remarque 3.4 (Principes pour une pédagogie de l'erreur)

1. ***Crédibilisation de l'erreur***
   — *L'erreur doit être reconnue comme légitime et informative, non comme une défaillance.*
2. ***Utilisation constructive***
   — *L'erreur doit être analysée et utilisée pour construire de nouvelles connaissances.*
3. ***Prévention des obstacles***
   — *Anticiper les obstacles épistémologiques et organiser leur dépassement.*
4. ***Évaluation diagnostique***
   — *L'évaluation doit diagnostiquer les obstacles, pas seulement contrôler les résultats.*

4 Application pratique : conception de séquences d'enseignement

4.1 Approche par situations-problèmes

L'une des approches les plus efficaces pour gérer les erreurs et obstacles consiste à concevoir des **situations-problèmes** qui :
- Créent des conflits cognitifs nécessaires au dépassement des obstacles
- Organisent des ruptures didactiques permettant l'abandon des connaissances erronées
- Mettent en jeu les connaissances antérieures pour révéler leurs limites
- N'offrent pas de solution immédiate nécessitant la construction de nouvelles connaissances

Exemple

[Situation-problème : La course de tortues] **Problème** : Deux tortues font une course. La première tortue fait 5 mètres en 2 secondes. La seconde fait 7 mètres en 3 secondes. Quelle tortue est la plus rapide ?
Analyse didactique :
- **Obstacle ciblé** : Confusion entre addition et proportionnalité
- **Conflit cognitif** : Les solutions intuitives (additionner les distances ou additionner les temps) ne fonctionnent pas
- **Rupture** : Nécessité d'introduire la notion de vitesse moyenne

Progression :
1. Mise en situation et première estimation (souvent intuitive et incorrecte)
2. Vérification par expérimentation concrète
3. Développement de procédures de comparaison
4. Généralisation et institutionnalisation de la notion de vitesse

4.2 Méthodes de diagnostic et d'évaluation

Remarque 4.1 (Outils d'évaluation diagnostique)

1. ***Analyse de productions écrites***
   — *Étude systématique des erreurs dans les copies d'élèves*
2. ***Entretiens cliniques***
   — *Questionnement approfondi pour accéder aux conceptions de l'élève*
3. ***Tâches diagnostiques***
   — *Situations spécifiquement conçues pour révéler les obstacles*
4. ***Observations systématiques***
   — *Codification et analyse des procédures utilisées par les élèves*

4.3 Formation des enseignants à l'analyse d'erreurs

La maîtrise de l'analyse d'erreurs constitue une compétence essentielle pour les enseignants de mathématiques. Cette formation doit développer :
- **Compétences diagnostiques** : Identifier et caractériser les erreurs
- **Compétences analytiques** : Comprendre les causes et les origines des erreurs
- **Compétences méthodologiques** : Utiliser des outils d'analyse rigoureux
- **Compétences didactiques** : Concevoir des remédiations adaptées

5 Conclusion : vers une didactique de l'erreur

5.1 Synthèse des apports

Les travaux sur l'erreur et les obstacles ont profondément transformé la didactique des mathématiques :

— **Conceptuel** : Rupture avec les conceptions traditionnelles de l'erreur
— **Méthodologique** : Développement d'outils d'analyse systématiques
— **Pédagogique** : Création d'approches didactiques novatrices
— **Formation** : Nouvelle vision du rôle de l'enseignant

5.2 Enjeux pour l'avenir

Les défis actuels incluent :

Remarque 5.1 (Défis futurs)

1. ***Individualisation***
   — *Adapter l'analyse d'erreurs aux profils cognitifs spécifiques*
2. ***Technologie***
   — *Intégrer les outils numériques dans l'analyse et la remédiation*
3. ***Formation***
   — *Développer la formation initiale et continue des enseignants*
4. ***Évaluation***
   — *Revoir les modalités d'évaluation pour intégrer la dimension diagnostique*

5.3 Message pour les futurs enseignants

La maîtrise de l'erreur et des obstacles ne constitue pas seulement une compétence technique mais une véritable philosophie pédagogique. Elle transforme la conception même du métier d'enseignant : de transmetteur de connaissances à créateur de situations d'apprentissage, analyseur de difficultés et développeur de compétences.

« L'erreur n'est pas un accident mais un moment nécessaire dans l'apprentissage, une étape vers la compréhension. » (Brousseau, 1988)