

Initiation à la didactique des mathématiques

Chapitre 4 : La résolution de problèmes

University Badji Mokhtar-Annaba

Novembre 2025

Table des matières

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Introduction : vers une nouvelle approche de la résolution de problèmes | 3 |
| 1.1 | De la résolution mécanique à la résolution constructive | 3 |
| 1.2 | L'approche constructiviste : les problèmes comme moteur d'apprentissage | 3 |
| 2 | Les théories de la résolution de problèmes | 3 |
| 2.1 | Le modèle classique : recherche d'un état-but | 4 |
| 2.2 | Le modèle des quatre phases de Polya | 4 |
| 2.3 | Le modèle des situations adidactiques | 4 |
| 2.4 | Les composantes de la situation-problème | 5 |
| 3 | Les stratégies de résolution | 5 |
| 3.1 | Stratégies générales de résolution | 5 |
| 3.2 | Identification des profils de résolution | 6 |
| 4 | Le rôle de l'enseignant dans la résolution de problèmes | 6 |
| 4.1 | L'enseignant comme créateur de problèmes | 6 |
| 4.2 | L'enseignant comme accompagnateur | 7 |
| 4.3 | Création de l'environnement didactique | 7 |
| 5 | L'évaluation de la résolution de problèmes | 7 |
| 5.1 | Principes de l'évaluation diagnostique | 7 |
| 5.2 | Des outils d'évaluation adaptés | 8 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 5.3 | Les niveaux de maîtrise | 9 |
| 6 | Les obstacles dans la résolution de problèmes | 9 |
| 6.1 | Obstacles cognitifs | 9 |
| 6.2 | Obstacles didactiques | 9 |
| 7 | Applications pratiques : Situations de résolution | 10 |
| 7.1 | Exemple 1 : Problème de division et de fractions | 10 |
| 8 | Conclusion : vers une didactique de la résolution | 11 |
| 8.1 | Transformations apportées par l'approche | 11 |
| 8.2 | Compétences de l'enseignant | 12 |
| 8.3 | Perspectives d'évolution | 12 |
| 9 | Message pour les futurs enseignants | 12 |

1 Introduction : vers une nouvelle approche de la résolution de problèmes

1.1 De la résolution mécanique à la résolution constructive

L'approche traditionnelle de la résolution de problèmes en mathématiques repose sur un modèle behavioriste où l'enseignant présente les concepts puis propose des exercices d'application. Cette approche présente plusieurs limites :

Limites de l'approche traditionnelles :

- Les problèmes sont souvent des applications directes de techniques connues
- L'accent est mis sur la méthodologie plus que sur la compréhension
- Les erreurs sont considérées comme des échecs individuels
- L'évaluation porte sur la conformité aux procédures

1.2 L'approche constructiviste : les problèmes comme moteur d'apprentissage

La didactique des mathématiques, influencée par les travaux de Brousseau et des théories cognitivistes, propose une approche révolutionnaire : **les problèmes constituent le moteur même de l'apprentissage.**

Définition

[Problème en didactique] Un problème est une situation où l'élève se trouve face à une tâche qu'il ne peut pas réaliser avec ses connaissances actuelles, mais qui l'amène à construire de nouveaux savoirs nécessaires pour la résoudre.

Caractéristiques d'un vrai problème :

- **Finalité claire** : L'élève comprend pourquoi il doit résoudre le problème
- **Challenge adapté** : Le problème représente un défi significatif pour l'élève
- **Nécessité d'apprentissage** : La résolution nécessite la construction de nouvelles connaissances
- **Contrôle de l'action** : L'élève doit pouvoir vérifier ses raisonnements

2 Les théories de la résolution de problèmes

2.1 Le modèle classique : recherche d'un état-but

Modèles cognitifs initiaux :

- **Conception séquentielle** : Présentation → Compréhension → Planification → Exécution → Vérification
- **Information processing** : Traitement de l'information à travers des étapes fixes
- **Limite** : Ces modèles ne rendent pas compte de l'aspect social et didactique

2.2 Le modèle des quatre phases de Polya

George Polya propose une méthode systématique en quatre étapes :

Phase 1 : Comprendre le problème

- Identifier les données et l'inconnue
- Reformuler le problème avec ses propres mots
- Représenter graphiquement ou schématiquement
- Distinguer les conditions nécessaires et les conditions suffisantes

Phase 2 : Établir un plan

- Chercher des problèmes analogues déjà résolus
- Utiliser les méthodes déjà connues
- Factoriser, particulariser, généraliser
- Introduire une notation appropriée

Phase 3 : Exécuter le plan

- Vérifier chaque étape du raisonnement
- Noter les calculs et les raisonnements
- Contrôler les résultats intermédiaires
- S'assurer de la cohérence avec les données

Phase 4 : Examen rétrospectif

- Vérifier si le résultat répond bien à la question posée
- Déduire le résultat d'une autre manière
- Utiliser le résultat obtenu pour autre chose
- Étudier la possibilité d'améliorer la solution

2.3 Le modèle des situations adidactiques

Guy Brousseau propose le concept de situation-problème où l'élève agit sans instruction explicite de l'enseignant pour élaborer une stratégie de résolution.

Définition

[Situation-problème] Une situation-problème est un dispositif didactique qui impose à l'élève de résoudre un problème qu'il ne peut pas résoudre en appliquant directement ses connaissances antérieures, et pour lequel l'enseignant organise les conditions de la renontée avec l'obstacle de connaissance.

2.4 Les composantes de la situation-problème

1. Le dispositif matériel

- **Matériel concret** : Objets manipulables, briques, jetons, etc.
- **Supports symboliques** : Énoncés, schémas, tableaux
- **Environnement de travail** : Tableaux, outils de calcul, cartes

2. Le contrat didactique spécifique

- **Règles explicites** : Ce que l'élève peut ou ne peut pas faire
- **But de la tâche** : L'objectif à atteindre
- **Liberté de recherche** : Autonomie de l'élève dans la stratégie

3. Les variables de la situation

- **Nature des données** : Mesurables, nombrables, comparables
- **Complexité numérique** : Petits/grands nombres, simples/composés
- **Formulation** : Textuelle, graphique, symbolique
- **Contexte** : Classique, fabuleux, historique, jeu

3 Les stratégies de résolution

3.1 Stratégies générales de résolution

1. Stratégies de compréhension

- **Explicitation** : Reformuler avec ses propres mots
- **Représentation** : Utiliser schémas, graphiques, abaques
- **Subdivision** : Découper en sous-problèmes plus simples
- **Traduction** : Passer d'une représentation à une autre

2. Stratégies de raisonnement

- **Trial and error** : Essais successifs avec apprentissage des échecs
- **Working backwards** : Raisonnement à rebours de la solution
- **Analogie** : Utiliser un problème similaire déjà résolu
- **Spécialisation** : Étudier des cas particuliers
- **Généralisation** : Passer du cas particulier au cas général

3. Stratégies de calcul

- **Approximation** : Estimation des ordres de grandeur

- **Construction de l'ordre** : Classer et ordonner les données
- **Modélisation** : Créer un modèle mathématique du problème
- **Optimisation** : Trouver la solution la plus efficace

3.2 Identification des profils de résolution

Remarque-Type de profil selon les stratégies privilégiées :

Remarque 3.1 (Profil "Analytique") *Les élèves qui privilégient la structuration rigoureuse du problème et la construction logique des étapes.*

Remarque 3.2 (Profil "Intuitif") *Les élèves qui s'appuient sur l'intuition et les stratégies rapides mais pas toujours rigoureuses.*

Remarque 3.3 (Profil "Pluriel") *Les élèves qui utilisent plusieurs stratégies en parallèle et s'adaptent au contexte.*

Remarque 3.4 (Profil "Systématique") *Les élèves qui adoptent des procédures prédéfinies et les appliquent de manière méthodique.*

4 Le rôle de l'enseignant dans la résolution de problèmes

4.1 L'enseignant comme créateur de problèmes

Conception de la situation-problème

- **Analyse a priori** : Prédit les stratégies possibles et les difficultés
- **Choix des variables** : Ajuste la difficulté aux objectifs
- **Mise en scène** : Organise l'environnement matériel et social
- **Anticipation** : Prévit les erreurs probables et leur évolution

Élaboration des problèmes

- **Problèmes ouverts** : Nécessitant initiative et créativité
- **Problèmes réalistes** : Liés aux situations de la vie quotidienne
- **Problèmes historiques** : Intégrant l'histoire des mathématiques
-
- **Problèmes interdisciplinaires** : Connectant mathématiques et autres disciplines

4.2 L'enseignant comme accompagnateur

Remarque-Durant la résolution, l'enseignant doit adopter une posture de "dévolution" :

Remarque 4.1 (Dévolution) *Processus par lequel l'enseignant fait abdication de son rôle de celui qui explique et devient celui qui permet à l'élève de construire le savoir.*

Stratégies d'intervention

- **Relances non directives** : "Comment as-tu fait?", "Qu'est-ce qui se passe?"
- **Questionnement sur le sens** : Clarifier les étapes du raisonnement
- **Validation sociale** : Organiser confrontation des procédures
- **Institutionalisation** : Faire le bilan des savoirs validity

4.3 Crédit de l'environnement didactique

Organisation de l'espace

- **Es spatial** : Tableaux pour exposer les productions
- **Es temporel** : Prévision de phases d'échanges et de confrontation
- **Es social** : Dynamique de groupes pour favoriser l'entraide
- **Es matériel** : Mise à disposition des outils nécessaires

Gestion des interactions

- **Interaction élève-problème** : Favoriser l'exploration autonome
- **Interaction élève-élève** : Organiser les débats et confrontations
- **Interaction élève-enseignant** : Moduler selon les besoins
- **Interaction mémoire-savoir** : Relier avec les savoirs antérieurs

5 L'évaluation de la résolution de problèmes

5.1 Principes de l'évaluation diagnostique

Definition-Type de problème vs Type d'évaluation :

Définition

[Évaluation fonctionnelle] L'évaluation porte sur les stratégies mises en œuvre plutôt que sur la conformité à un résultat unique.

Critères d'évaluation

1. Processus de résolution

- **Compréhension** : Bonne lecture de l'énoncé et identification des données
- **Stratégie** : Existence et cohérence d'une méthode de résolution
- **Exécution** : Qualité des calculs et de l'application de la stratégie
- **Contrôle** : Capacité à vérifier la cohérence du résultat

2. Expressions des raisonnements

- **Explicitation** : Capacité à décrire sa démarche
- **Argumentation** : Justification des étapes du raisonnement
- **Modification** : Adaptation de la stratégie en cours de résolution
- **Communication** : Clarté dans la présentation de la solution

3. Apprentissages et transferts

- **Construction** : Élaboration de nouveaux concepts et méthodes
- **Extension** : Utilisation des acquis dans d'autres contextes
- **Intégration** : Capacité à relier différents domaines mathématiques
- **Création** : Génération de nouveaux problèmes inspirés de la résolution

5.2 Des outils d'évaluation adaptés

Exempel-Type d'outils d'évaluation de la résolution :

Exemple

[Portfolio de résolution] Collection des productions d'élèves avec commentaires sur les stratégies utilisées.

Exemple

[Grille d'observation structurée] Tableau de critères d'évaluation avec indicateurs observables.

Exemple

[Auto-évaluation guidée] Questionnaire permettant à l'élève d'analyser sa propre démarche.

Exemple

[Évaluation par les pairs] Analyse critique des solutions produites par d'autres élèves.

5.3 Les niveaux de maîtrise

Remarque-Type de progression en résolution de problèmes :

Remarque 5.1 (Niveau 1 : Résolution reproductrice) *L'élève applique une méthode déjà vue dans un contexte similaire.*

Remarque 5.2 (Niveau 2 : Résolution productive) *L'élève adapte sa méthode à de nouvelles situations ou utilise plusieurs stratégies.*

Remarque 5.3 (Niveau 3 : Résolution constructive) *L'élève crée une nouvelle stratégie en combinant ses acquis.*

Remarque 5.4 (Niveau 4 : Résolution créative) *L'élève génère de nouveaux problèmes ou de nouvelles méthodes.*

6 Les obstacles dans la résolution de problèmes

6.1 Obstacles cognitifs

1. Obstacles de compréhension

- **Traductions erreurs** : Interprétation erronée du texte
- **Représentations incorrectes** : Image mentale faussée du problème
- **Conflits entre langues** : Mathématiques écrite et scolaire
- **Blocages symboliques** : Difficultés avec la manipulation d'inconnues

2. Obstacles stratégiques

- **Effet d'mode** : Persistance d'une stratégie même quand elle ne marche pas
- **Fixation fonctionnelle** : Impossibilité d'adapter une stratégie à un nouveau contexte
- **Néophobia** : Éviter les stratégies nouvelles par crainte de l'échec
- **Dépendance à l'enseignant** : Attente constante de validation et d'aide

3. Obstacles métacognitifs

- **Absence de contrôle** : Ne pas vérifier la cohérence des résultats
- **Difficulté de planification** : Difficulté à organiser les étapes
- **Manque d'auto-évaluation** : Incapacité à évaluer sa propre performance
- **Peur de l'incertitude** : Besoin de certitude et de procédure certainé

6.2 Obstacles didactiques

1. Dépendance à l'enseignant

- **Attente d'instructions** : Besoin d'être guidé dans chaque étape

- **Contrôle externe** : Nécessité d'une validation constante
- **Sur quit** : Renoncement devant la moindre difficulté
- **Satisfaction de surface** : Accepter des résultats non vérifiés

2. Difficultés de communication

- **Blocages linguistiques** : Incapacité à expliquer sa démarche
- **Peur de s'exprimer** : Crainte de montrer ses erreurs
- **Censurer** : Se modifier de son discours selon l'audience
- **Simplification excessive** : Réduction à des termes absurdes

3. Réduction de l'inconnu

- **Obsession de trouver le nombre** : Se condamner à trouver une réponse numérique
- **Effet de préférence** : Choisir automatiquement la première méthode venue
- **L'invariance** : Ne pas chercher à généraliser ses résultats
- **Manque de création** : Éviter l'imagination et l'innovation

4. Remédiation aux obstacles

- **Provocation** : Créer les conditions pour que l'obstacle émerge
- **Accompagn** : Accompagner l'élève dans le dépassement
- **Conflits cognitifs** : Organiser les contradictions fécondes
- **Stabilisation** : Installer les nouvelles connaissances

7 Applications pratiques : Situations de résolution

7.1 Exemple 1 : Problème de division et de fractions

Situations adidactiques pour enseigner les fractions :

Problème : "Ana fabriquer une clar der remaints dro r'cs ce dan ble con tre coupe heur's a col bjet uni unin pou erf ue 0 tri deh q rrt de et 5 et sus 6 ci rqu e r n. M su q ct la me sur par déri c et é nt uu rt r que ts de"

Remarque 7.1 (Variables de cette situation)

— **Numbering** : Ranges de nombres utilisés

- **Material** : Unités de mesure concrètes ou non
- **Complexity** : Nombre d'étapes dans la division
- **Meaning** : Type de contexte (mesure, distribution, etc.)

Exemple

[Exemple 2 : Problème de construction] **Enoncé** : "Construis un carré avec le même périmètre qu'un triangle rectangle donné. Quelles sont les stratégies possibles ?"

Remarque 7.2 (Analyse didactique) *Ce problème illustre parfaitement le concept de situation-problème car :*

- **Elle nécessite des négociations** : Le périmètre et l'aire
- **Plusieurs stratégies** : Calcul exact, expérimentation, graphiques
- **Limite de la solution** : Exploiter en extrapolant à d'autres formes
- **Challenge cognitif** : Adapter à des données variables

Exemple

[Exemple 3 : Problème historique] **Problème** : "Inspiré d'un problème de Diophante : Une trifle a contient 5 divas également : ozts et uns. Si 2/5 du total des divas sont uns, combien d'ozts y a-t-il dans la trifle ?"

Remarque 7.3 (Intérêt pédagogique) — **Historicité** : Connecter avec l'*histoire des mathématiques*

- **Langage mathématicien** : Découvrir les usages anciens
- **Culturalisation** : Faire que r liées aux sciences
- **Transposition** : Transposer les concepts contemporains

8 Conclusion : vers une didactique de la résolution

8.1 Transformations apportées par l'approche

Cette approche de la résolution de problèmes modifie fondamentalement l'enseignement des mathématiques :

1. Transformation pédagogique

- **Modèle** : De l'application directe à la recherche
- **Autonomie** : L'élève devient acteur de sa compréhension
- **Communauté** : Création d'une communauté de chercheurs
- **Validation** : Multiplication des sources de validation

2. Transformation méthodologique

- **Stratégies** : Développement de multiples stratégies de résolution
- **Transfert** : Capacité à transporter vers de nouveaux contextes
- **Création** : Génération de nouveaux problèmes
- **Evaluation** : Portée sur les processus plus que sur les produits

3. Transformation de l'évaluation

- **Diagnostic** : Evaluation des processus cognitifs
- **Formative** : Remediation des difficultés en temps réel
- **Adaptive** : Adaptation aux profils individuels
- **Holistique** : Evaluation globale des compétences

8.2 Compétences de l'enseignant

L'enseignant dans cette approche développer de nouvelles compétences :

- Remarque 8.1 (Compétences techniques)** — *Conception de situations-problèmes adaptées*
- *Observation des stratégies d'élèves*
 - *Intervention en devolución approprié*
 - *Validation et institutionalisation des savoirs*

- Remarque 8.2 (Compétences relationnelles)** — *Acceptation de l'incurité et des erreurs*
- *Confiance dans les capacités des élèves*
 - *Respect des divers modes de fonctionnement*
 - *Construction d'un climat de sécurité intellectuelle*

- Remarque 8.3 (Compétences heuristiques)** — *Développement de stratégies de résolution variées*
- *Diversification des problèmes proposés*
 - *Création de contexts motivants et significatifs*
 - *Adaptation aux profils cognitifs des élèves*

8.3 Perspectives d'évolution

Les enjeux actuels de la résolution de problèmes :

- Remarque 8.4 (Enjeux numériques)** — *Intégration des outils numériques comme champs de problèmes*
- *Exploitation des bases de données pour problèmes réels*
 - *Création d'environnements de résolution assisté par ordinateur*
 - *Simulation de situations complexes ou impossible à réaliser*

- Remarque 8.5 (Enjeux sociétaux)** — *Préparation aux défis environnementaux et sociaux*
- *Développement de l'esprit critique*
 - *Renforcement de la motivation pour les sciences*
 - *Préparation aux métiers du 21ème siècle*

9 Message pour les futurs enseignants

La résolution de problèmes n'est plus un exercice d'application mais le cœur de l'apprentissage mathématiques. Vous becomez créateur de mondes mathématiques où chaque problème devient une aventure intellectuelle pour vos élèves.

Cette approche transforme non seulement l'enseignement des mathématiques mais aussi votre conception du métier d'enseignant : d'exécutant de programmes vous devenez créateur d'expériences d'apprentissage.