Règle de l'Hospital

Jean-François Burnol, 22 septembre 2009

Soit f et g deux fonctions à valeurs réelles, dérivables, sur $]0,\eta]$. On suppose que g et g' ne s'annulent pas sur $]0,\eta]$.

> On suppose que la fraction $\frac{f(x)}{g(x)}$ se présente pour $x \to 0$ soit sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ soit sous la forme indéterminée $\frac{+\infty}{+\infty}$. Alors :
>
> $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
>
> sous la condition que l'on connaisse l'existence de la deuxième limite, celle-ci pouvant être infinie.

Le cas $\frac{0}{0}$

L'hypothèse est $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0} g(x)$. On prolonge f et g par continuité et on applique le **Deuxième théorème des accroissements finis**, valable pour f et g continues sur $[a,b]$, dérivables à l'intérieur avec g' non nulle.

$$\exists c \in]a,b[\qquad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Preuve : on regarde $x \mapsto (f(x)-f(a))(g(b)-g(a)) - (g(x)-g(a))(f(b)-f(a))$ qui est nulle au point $x = a$, et aussi au point $x = b$ et on lui applique le Lemme de Rolle (noter que la division finale par $g(b)-g(a)$ est licite car ce terme est non nul par le (premier) théorème des accroissements finis).

Revenant à l'Hospital dans le cas $\frac{0}{0}$, on a donc :

$$\forall x \ \exists y \in]0,x[\quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(y)}{g'(y)}$$

D'où la conclusion (vous pourrez détailler plus le « d'où » si vous en ressentez le besoin). Notez bien que cette conclusion vaut aussi pour $f'/g' \to +\infty$ ou $f'/g' \to -\infty$. Et si l'on veut être totalement général, on écrira :

$$\liminf_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \liminf_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Le cas $\frac{+\infty}{+\infty}$

Ma démonstration sera moins élégante. Supposons que l'on ait un nombre réel A tel que $\frac{f'(x)}{g'(x)} \leq A$ pour x suffisamment proche de zéro, disons pour $0 < x \leq x_0$. Tout d'abord je rappelle (Darboux) que g' qui est partout non nulle ne peut pas changer de signe. Comme $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$, g ne peut pas être croissante, donc elle est décroissante (et positive), et partout $g' < 0$. Ainsi $f'(x) - Ag'(x) \geq 0$, donc $f(x) - Ag(x) \leq f(x_0) - Ag(x_0)$ donc :

$$0 < x \leq x_0 \implies \quad \frac{f(x)}{g(x)} \leq A + \frac{f(x_0) - Ag(x_0)}{g(x)}$$

Par conséquent
$$\limsup_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \leq A$$
Mais on peut prendre pour A n'importe quel réel strictement supérieur à $\limsup_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, sauf si ceci vaut $+\infty$. Dans le premier cas on en en déduit :
$$\limsup_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
et cela reste valable tautologiquement dans le deuxième cas. On prouvera de la même façon
$$\liminf_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \liminf_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$
d'où la conclusion finale, en particulier lorsque $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, finie ou infinie.

Bien sûr l'emploi des $\limsup$ et $\liminf$ est une commodité dont on pourrait se passer, si on le voulait vraiment, ce qui n'est pas mon cas !

Le cas complexe

Il me semble que ce cas est rarement abordé dans les livres... d'ailleurs j'y réfléchis pour la première fois en écrivant ces lignes. Bon je vais juste regarder le cas $\frac{0}{0}$ car je subodore des difficultés techniques déjà au niveau de la formulation de l'énoncé pour $\frac{\infty}{\infty}$. Donc ici f et g sont à valeurs complexes avec $f(0) = g(0) = 0$. Et on suppose que le nombre complexe $L = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe. Si g est à valeurs réelles, aucun problème, on sépare f en parties réelle et imaginaire... et, attendez, voilà, contre-exemple, voici : $f(x) = x^4$, $g(x) = x^5 \exp(-ix^{-2})$. Tout d'abord $\lim \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$. Et $g'(x) = (5x^4 + i2x^2)\exp(-ix^{-2})$ (qui est bien non nul pour $x \neq 0$) tandis que $f'(x) = 4x^3$. Donc $|\frac{f'}{g'}| \sim 2|x|$ et $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$. Ainsi
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$$
Conclusion qui va changer votre vie : ne pas utiliser l'Hospital avec un dénominateur complexe !

Dernière remarque : on a la variante où la variable x au lieu de tendre vers 0 (ou une valeur finie) tend vers $+\infty$, mais elle se ramène immédiatement au cas déjà étudié en passant à la variable $t = \frac{1}{x}$.