Estimations des erreurs sur la discrétisation d'un problème de contrôle optimal elliptique par la méthode des éléments finis et une méthode spectrale: Estimations a priori et a posteriori

R. Ghanem
Département de Mathématiques, Université Badji Mokhtar-Annaba

Contents

Chapter 1

Introduction

Les problèmes de contrôle optimal sont souvent rencontrés dans des domaines très variés (mécanique, physique, économie, etc...). Ces problèmes ne sont pas faciles à résoudre, leurs solution est difficile voir impossible à mettre en œuvre, pour cela on fait appel aux méthodes numériques pour résoudre ce type de problèmes. Pour être plus précis on fait appel aux méthodes d'approximation pour discrétiser le problème continu de dimension infinie et le transformer en un problème discret de dimension finie qu'on pourra résoudre par des techniques de calcul scientifique et d'analyse numérique.

Dans notre travail, on va s'intéresser particulièrement à deux méthodes d'approximation; à savoir la méthode des éléments finis et une méthode spectrale.

Le principe général de la méthode des éléments finis consiste à remplacer l'espace des solutions exactes par un sous-espace de dimension finie en introduisant un paramètre d'approximation h qui tend vers zéro.

Les méthodes d'approximation spectrales sont des méthodes qui recherchent la solution comme une combinaison linéaire finie de polynômes de degré N et ce dernier représente le paramètre d'approximation qui tend vers $+\infty$. Elles sont utilisées depuis longtemps dans l'approximation des équations aux dérivées partielles. Dans ce travail on va traiter en particulier l'application des méthodes spectrales par la méthode de Galerkin en utilisant les polynômes de Legendre.

Il est bien connu que toute approximation numérique engendre des erreurs; ainsi notre principal objectif, en premier lieu consiste à évaluer les erreurs a priori et a posteriori engendrées par les deux méthodes d'approximation introduites en haut. Il est à noter que l'estimation a priori de l'erreur nécessite la connaissance de la solution exacte du problème à résoudre ainsi que les paramètres d'approximation tandis ce que l'estimation a posteriori necessite la connaissance de la solution approchée.

Ce manuscrit est organisé de la façon suivante, il est divisé en quatres chapitres; le premier est une introduction nécessaire à l'étude de ce genre de problème, elle contient des notions de base et quelques notions d'analyse fonctionnelle qui nous serons utiles.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de la méthode des éléments finis et des méthodes spectrales.

Le troisième chapitre est consacré en grande partie aux estimations d'erreur a priori où après avoir défini les conditions nécessaires d'optimalité on donne différentes estimations sur le contrôle, l'état ainsi que la fonction objectif.

Dans le quatrième et dernier chapitre on donne différentes estimations d'erreur a posteriori sur la discrétisation du problème de contrôle optimal par les deux méthodes de discrétisation.

Chapter 2

Notions de base

Cette partie est consacrée à quelques notions générales élémentaires qui seront utiles à notre travail.

2.1 Quelques rappels

2.1.1 Norme et produit scalaire

Soit E un espace vectoriel.

Definition 2.1.1. $\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *est une norme sur* E *si et seulement si elle vérifie:*

(N1) $(\|x\| = 0) \Longrightarrow (x = 0)$

(N2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \ \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

(N3) $\forall x, y \in E, \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Definition 2.1.2. *On appelle produit scalaire sur* E *toute forme bilinéaire symétrique définie positive.*

$(.,.) : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est donc un produit scalaire sur E si est seulement s'il vérifie:

(S1) $\forall x, y \in E, \ (x, y) = (y, x)$

(S2) $\forall x_1, x_2, y \in E, \ (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$

(S3) $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$

(S4) $\forall x \in E, x \neq 0, \quad (x, x\ ) > 0$

- Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace normé.

- Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien.

2.1.2 Suite de Cauchy - espaces complets

Definition 2.1.3. *Soit E un espace vectoriel et (x_n) une suite de E. (x_n) est une suite de Cauchy si et seulement si:*

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $p > N$ et $q > N$ on ait: $\|x_p - x_q\| < \varepsilon$

Remark 2.1.1. *Toute suite convergente est de Cauchy.*

Definition 2.1.4. *Un espace vectoriel est complet si et seulement si toute suite de Cauchy y est convergente.*

Definition 2.1.5. *Un espace préhilbertien complet est un espace de Hilbert.*

Definition 2.1.6. *Soit V un espace vectoriel quelconque. On définit V' l'espace dual de V comme étant l'espace des applications linéaires et continues dans V, muni du crochet de dualité $\langle ., . \rangle_{V,V'}$.*

Definition 2.1.7. *Soit U et V deux espaces vectoriels normés. On dit que U s'injecte de façon continue dans V autrement dit : $U \hookrightarrow V$ s'il existe une constante $c > 0$ telle que:*

$$\|.\|_V \leq c \|.\|_U$$

2.2 Espaces fonctionnels et espaces de Sobolev

Definition 2.2.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, muni de la mesure de Lebesgue on note par $L^2(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables de carré sommables dans Ω tel que:*

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ mesurable \ \mid \int_\Omega |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

muni de la norme:

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire:

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

Definition 2.2.2. *On peut aussi définir les espaces L^p avec $1 \leq p \leq +\infty$.*

Pour $1 \leq p < +\infty$, L^p est l'espace des fonctions mesurables de puissance p-ème intégrable sur Ω. Muni de la norme :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Definition 2.2.3. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ pour tout entien $m \geq 0$, l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ est défini par:*

$$H^m(\Omega) = \left\{ v \textit{ dans } L^2(\Omega) \textit{ tel que, pour tout } \alpha \textit{ avec } |\alpha| \leq m,\ \partial^\alpha v \textit{ dans } L^2(\Omega) \right\}$$

L'espace $H^m(\Omega)$ est muni du produit scalaire:

$$(u, v) = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha v(x) dx$$

La norme sur $H^m(\Omega)$ est donnée par:

$$\|u\|_{H^m} = \sqrt{(u, u)}$$

Definition 2.2.4. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ on appelle espace de Sobolev d'ordre 1 noté encore $H^1(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de $L^2(\Omega)$ dont les dérivées partielles (au sens des distributions) sont encore des fonctions de $L^2(\Omega)$ ie:*

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \textit{ tq } \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega);\ i = 1, ..., n \right\}$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire:

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx + \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}dx$$

est un espace de Hilbert et est muni de la norme:

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega (|v(x)|^2 + |\nabla v(x)|^2)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

-Formule de Green:

Theorem 2.2.1. *Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$. Si $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$, on a*

$$\int\limits_\Omega \Delta u(x).v(x)\ dx = -\int\limits_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)\ dx + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x).v(x)\ ds$$

avec

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u.n$$

où n un vecteur normal exterieur à $\partial\Omega$.

Definition 2.2.5. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à frontières regulières. On définit l'éspace $H_0^1(\Omega)$ comme étant l'espace des fonctions de $H^1(\Omega)$ nulles sur le bord de Ω autrement dit:*

$$H_0^1(\Omega) = \left\{u \in H^1(\Omega)/u = 0 \ sur\ \partial\Omega\right\}$$

Definition 2.2.6. *Soit Ω un ouvert borné à frontières lipschitzienne de $\mathbb{R}^n$ et soit p tel que $1 \leq p \leq +\infty$, et m un entier positif . On définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par:*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega), \forall\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m, \partial^\alpha v \in L^p(\Omega)\}$$

2.3 Quelques inégalités

- Inégalité de Cauchy-Schwarz:

Definition 2.3.1. *Soit u et $v \in L^2(\Omega)$ alors: $u, v \in L^1(\Omega)$ et:*

$$|(u,v)| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

- Inégalité d'Hölder:

Definition 2.3.2. *Soit u et v deux fonctions de $L^p(\Omega)$ et $L^q(\Omega)$ respéctivement avec : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors on a:*

$$|(u,v)| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$$

Remark 2.3.1. *Une généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz est l'inégalité d'Hölder.*

- Inégalité de Poicarré

Definition 2.3.3. *Si Ω est borné (ouvert de $\mathbb{R}^n$) de frontière assez régulière; il existe une constante $c(\Omega) > 0$ telle que:*

$$\forall v \in H_0^1, \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c(\Omega) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

tel que:

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = \left(\sum_{i=0}^{n} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Chapter 3

Méthode des éléments finis et méthodes spectrales

Dans ce chapitre on va aborder la méthode des éléments finis ainsi que les méthodes spectrales; on va présenter leur principe général et quelques notions élémentaires sur les deux méthodes.

3.1 Méthode des éléments finis

3.1.1 Principe général

La méthode des éléments finis utilisée dans ce travail repose sur deux principes : d'une part, la formulation d'un problème approché par la méthode de Galerkin ; d'autre part, la construction d'un espace d'approximation (de dimension finie) à l'aide d'un maillage.

Notions élémentaires sur les maillages:

Intuitivement, un maillage d'un domaine Ω est une partition de Ω en mailles. Pour simplifier, on suppose que ces mailles sont des intervalles en dimension une et des triangles en dimension deux. Les mailles sont également appelées les cellules du maillage.

La famille de mailles constituant le maillage sera notée $\{K_m\}_{1\leq m\leq N_{ma}}$, où N_{ma} est le nombre de mailles. Par hypothèse, les mailles sont des fermées et leurs intérieurs sont deux à deux disjoints (il n'y a pas de recouvrement entre les mailles).

Par la suite, on pose:

$$h_{K_m} = diam\,(K_m) = \max_{x_1,x_2\in K_m} \|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^d}, \qquad {\scriptstyle m\in\{1,\cdots,N_{ma}\}}$$

où $\|.\|_{\mathbb{R}^d}$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$. On pose également:

$$h = \max_{1\le m\le N_{ma}} h_{K_m}$$

et

$$T_h = \{K_m\}_{1\le m\le N_{ma}}$$

Dans les applications, on est souvent amené à considérer une suite de maillages de plus en plus fins, ce qu'on notera conventionnellement $\{T_h\}_{h>0}$(famille de maillages).

Remark 3.1.1. *En deux dimensions la famille de maillage $\{T_h\}_{h>0}$ est appelée souvent "famille de triangulation".*

Definition 3.1.1. *(**Maillage régulier**)Un maillage régulier est un maillage dont tous les éléments sont réguliers (équilatéraux lorsqu'il s'agit de triangles) en outre soit $\{T_h\}_{h>0}$ une famille de maillage de Ω. On dit qu'il s'agit d'une famille de maillage réguliérs si:*

1- h qui est définie précédemment tend vers zéro.

2- Il existe une constante C telle que, pour tout $h > 0$ et tout K_m dans T_h,

$$\frac{h}{\rho\,(K_m)} \le C$$

où $\rho\,(K_m)$, définie comme étant le diamètre de la plus grande boule contenue dans K_m.

Definition 3.1.2. *Un n-simplexe K de $\mathbb{R}^n$ est l'envloppe convexe de $n+1$ points P_j, $1 \le j \le n+1$, appelès sommets de K.*

Remark 3.1.2. *On note que tout n-simplexe est un sous-ensemble fermè de $\mathbb{R}^n$; et les sommets ou noeuds du maillage T_h sont les sommets des n-simplexes K_i qui le composent. Par convention, le paramètre h désigne le maximum des diamètres des n-simplexes K_i.*

Definition 3.1.3. *Pour tout entier* m, $0 \leq m \leq n-1$, *une* m*-face d'un* n*-simplexe* K *est un* m*-simplexe dont les* $m+1$ *sommets font partie des* $n+1$ *sommets de* K. *En particulier, toute* $(n-1)-$*face est appelée face, toute* $1-$*face est appelée arête et toute* $0-$*face est appelée sommet.*

Definition 3.1.4. *On dit que le domaine* Ω *est polyédrique si* $\bar{\Omega}$ *est une réunion finie de polyèdres de* $\mathbb{R}^n$; *où* $\bar{\Omega}$ *désigne l'adhèrence du domaine* Ω.

Remark 3.1.3. *Rappelons qu'un polyèdre est une intersection finie de demi-espaces de* $\mathbb{R}^n$ *et que les parties de son bord qui appartiennent à un seul hyperplan sont appelées ses faces.*

Definition 3.1.5. *Soit* Ω *un ouvert polyèdrique de* $\mathbb{R}^n$. *Un maillage triangulaire ou une triangulation de* $\bar{\Omega}$ *est un ensemble* T_h *de n-simplexes* $(K_i)_{1 \leq\ i\ \leq\ N}$ *qui vérifient:*

1. $K_i \subset \bar{\Omega}$ et $\bar{\Omega} = \cup_{i=1}^{N} K_i$,

2. l'intersection $K_i \cap K_j$ de deux n-simplexes distincts est un m-simplexe, avec $0 \leq m \leq n-1$, dont tous les sommets sont aussi des sommets de K_i et K_j.

3.1.2 Notion de problème bien posé

L'objectif de cette section est d'introduire un problème abstrait général et de préciser la notion de problème bien posé.

Formulation variationnelle générale

D'une façon générale, la formulation variationnelle sera obtenue en faisant le produit scalaire $L^2(\Omega)$ de l'équation avec une fonction v appartenant à un espace V (à préciser), et en intégrant sur Ω les termes d'ordre les plus élevés en tenant compte des conditions aux limites du problème. On arrive alors à une formulation du type:

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \text{ dans } W \ \text{ tel que} \\ a(u,v) = f(v), \ \text{pour tout } v \text{ dans } V. \end{cases} \tag{1.1}$$

où

- W et V sont des espace vectoriels de fonctions définies sur Ω. Nous nous placerons toujours dans le cas où W et V sont des espaces de Hilbert et noterons $\|.\|_W$ et $\|.\|_V$ leurs normes;

- $a(u,v)$ une forme bilinéaire sur $W \times V$. Nous supposerons que $a(.,.)$ est continue sur $W \times V$, ce que nous noterons $a(.,.)$ dans $L(W \times V, \mathbb{R})$.

- $f(v)$ une forme linéaire sur V. Nous supposerons que f est continue sur V, ce que nous noterons f dans $V' = L(V, \mathbb{R})$. De plus, pour alléger les notations, nous notons $f(v)$ au lieu de $\langle f, v\rangle_{V',V}$.

Definition 3.1.6. *On dit que le problème (1.1) est bien posé s'il admet une solution et une seule et si on a la propriété de stabilité linéaire suivante:*

$$\textit{il existe } c > 0, \quad \textit{pour tout } f \textit{ dans } V', \|u\|_W \leq c\,\|f\|_{V'}$$

Résultats d'existence et d'unicité

Notre objectif principal est de déterminer sous quelles conditions le problème (1.1) est bien posé. Les deux principaux résultats sont le théorème de Lax-Milgram qui donne une condition suffisante et le théorème de Nečas qui donne des conditions nécessaires et suffisantes.

Continuité

Definition 3.1.7. *Une forme linéaire $f(v)$ sur V est continue si et seulement s'il existe une constante K telle que:*

$$|f(v)| \leq K\,\|v\|_V, \textit{ pour tout } v \textit{ dans } V$$

Definition 3.1.8. *Une forme bilinéaire $a(u,v)$ sur $W \times V$ est continue si et seulement s'il existe une constante M telle que:*

$$|a(u,v)| \leq M\,\|u\|_W\,\|v\|_V, \textit{ pour tout } (u,v) \textit{ dans } W \times V$$

On va traiter le cas où solution et fonctions tests appartiennent au même espace fonctionnel (i.e. $W = V$). On considère donc le problème suivant:

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \text{ dans } V \text{ tel que} \\ a(u,v) = f(v), \text{ pour tout } v \text{ dans } V. \end{cases} \tag{1.2}$$

Theorem 3.1.1. ***(Lax-Milgram)*** *Soit V un espace de Hilbert et $a(.,.)$ dans $L(V \times V, \mathbb{R})$ et f dans V'. Alors, sous la condition:*

(lm) la forme bilinéaire $a(.,.)$ est coercive, c'est-à-dire, il existe une constante $\alpha > 0$ telle que:

$$\text{Pour tout } u \text{ dans } V,\ a(u,u) \geq \alpha \|u\|_V^2$$

Le problème (1.2) est bien posé. En particulier, nous avons l'estimation:

$$\text{Pour tout } f \text{ dans } V',\ \|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\ \|f\|_{V'} \tag{1.3}$$

Theorem 3.1.2. *Soit V un espace de Hilbert, a dans $L(V \times V, \mathbb{R})$ et f dans V'.*

Supposons que $a(.,.)$ est symétrique et positive c'est-à-dire que $a(u,v) = a(v,u)$ pour tout u, v dans V et $a(u,u) \geq 0$ pour tout u dans V.

Alors, u est solution du problème (1.2) si et seulement si u minimise sur V la fonctionnelle:

$$J(u) = \frac{1}{2} a(u,u) - f(u),\ \text{pour tout } u \text{ dans } V,$$

et on considère le problème de minimisation:

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \text{ dans } V \quad \text{tel que} \\ J(u) = \min\limits_{v \in V} J(v) \end{cases}$$

Proof. (Voir référence [5]) □

Dans le cas de la formulation plus générale (1.1), on a le théorème suivant:

Theorem 3.1.3. *:**(Banach-Nečas-Babuska)** Soient W et V deux espaces de Hilbert, a dans $L(W \times V, \mathbb{R})$ et f dans V' . Alors le problème (1.1) est bien posé si et seulement si:*

$$\textit{il existe } \alpha > 0 \textit{ telle que } \inf_{u \in W} \sup_{v \in V} \frac{a(u,v)}{\|u\|_W\ \ \|v\|_V} \geq \alpha \tag{n1}$$

Ainsi, on a l'estimation:

$$\text{Pour tout } f \ \text{ dans } V',\ \|u\|_W \leq \frac{1}{\alpha}\ \|f\|_{V'} \tag{1.4}$$

3.1.3 La méthode de Galerkin

Cette section est consacrée à l'approximation du problème abstrait (1.1) par la méthode de Galerkin. Le principe général consiste à définir un maillage du domaine Ω, grâce auquel on va remplacer dans (1.1) les espaces fonctionnels W et V par des espases d'approximation de dimension finie, notés W_h et V_h. Pour des raisons de simplicité, on ne considèrera que l'approximation conforme où W_h inclus dans W et V_h inclus dans V.

Dans ces condition, la forme bilinéaire $a(.,.)$ et la forme linéaire f sont définies sur $W_h \times V_h$ et V_h respectivement et le problème approché s'écrit sous la forme:

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \text{ dans } W_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = f(v_h), \text{ pour tout } v_h \text{ dans } V_h \end{cases} \tag{1.5}$$

Un cas particulier de (1.5) est celui où on choisit le même espace d'approximation V_h pour la solution et les fonctions tests, ce qui conduit au problème approché:

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \text{ dans } V_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = f(v_h), \text{ pour tout } v_h \text{ dans } V_h \end{cases} \tag{1.6}$$

Dans ce cas, nous parlerons de méthode de Galerkin standard.

Remark 3.1.4. *Si le problème modèle satisfait la condition de Něcas, rien ne garantit que le problème approché la satisfaits également et il est nécessaire de vérifier la condition inf-sup discrète.*

Afin d'appliquer les théorèmes de Lax-Milgram et de Nečas il nous faut disposer de la version discrète des conditions donées par les deux théorèmes (Lax-Milgram et Něcas) qui est donnée comme suit:

− Pour le Théorème de Lax-Milgram, la condition discrète s'écrit:

(lm_h) il existe une constante $\alpha_h > 0$ telle que:

$$\text{Pour tout } u_h \text{ dans } V_h,\ a(u_h, u_h) \geq \alpha_h \|u_h\|_V^2$$

− Pour le Théorème de Něcas, on obtient la condition discrète:

$$\text{Il existe } \alpha_h > 0 \text{ telle que } \inf_{u_h \in W_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{a(u_h, v_h)}{\|u_h\|_{W_h} \ \|v_h\|_{V_h}} \geq \alpha_h \tag{$n1_h$}$$

Corollary 3.1.1. *Soit V un espace de Hilbert et $a(.,.)$ dans $L(V \times V, \mathbb{R})$ satisfaisant la condition (lm) et f dans V'. Soit V_h inclus dans V. Alors, le problème approché (1.6) est bien posé. En partriculier, pour tout f dans V'. On a l'estimation:*

$$\|u_h\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \; \|f\|_{V'}$$

Corollary 3.1.2. *Soit V et W deux espaces de Hilbert, $a(.,.)$ dans $L(V \times W, \mathbb{R})$ et f dans V'. Soit V_h inclus dans V et W_h inclus W et supposons que les espaces V_h et W_h soient de même dimension, supposons la condition $(n1_h)$. Alors, le problème approché (1.5) est bien posé. En partriculier, pour tout f dans V'. On a l'estimation:*

$$\|u_h\|_W \leq \frac{1}{\alpha_h} \; \|f\|_{V'}.$$

Definition 3.1.9. *On appelle opérateur d'interpolation, l'application linéaire Π_h de $H^1(\Omega)$ dans V_h définie, pour tout v dans $H^1(\Omega)$, par:*

$$(\Pi_h v)(x) = \sum_{j=0}^{n+1} v(x_j)\, \phi_j(x),$$

où $\phi_j(x)$ est la base de Galerkin.

Lemma 3.1.1. *On suppose que les conditions de continuité et coercivité sont vérifiées et qu'il existe un sous espace ϑ inclus et dense dans V et une application Π_h de ϑ dans V_h, tels que:*

$$\lim_{h \to 0} \|v - \Pi_h(v)\| = 0, \text{ pour tout } v \text{ dans } \vartheta.$$

Alors la méthode de Galerkin converge, c'ést-à-dire:

$$\lim_{h \to 0} \|u - u_h\| = 0.$$

Lemma 3.1.2. ***(de Nečas)*** *Soit $\{T_h\}_{h>0}$ une famille de maillages réguliers de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. On suppose que $k+1 > n/2$. Alors, pour tout v dans $H^{k+1}(\Omega)$ l'interpolée $\Pi_h v$ est bien définie, et il existe une constante C, indépendante de h et de v, telle que:*

$$\|v - \Pi_h(v)\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^k \|v\|_{H^{k+1}(\Omega)}.$$

Lemma 3.1.3. *Soit l'opérateur d'interpolation moyenne $\hat{\pi}_h$ définit par:*

$$\hat{\pi}_h v = \sum_z v_z \phi_z,$$

où ϕ_z est la fonction de base de l'éspace des éléments finis au noeud z. Alors pour tout $m = 0$ ou 1, $1 \leq q \leq \infty$ et v dans $W^{1,q}(\Omega)$ on a :

$$\|v - \hat{\pi}_h v\|_{W^{m,q}(K)} \leq \sum_{\bar{K}' \cap \bar{K} \neq \emptyset} M h_K^{1-m} \|v\|_{W^{1,q}(K')}.$$

Lemma 3.1.4. *pour tout v dans $W^{1,q}(\Omega_h)$, $1 \leq q < \infty$,*

$$\|v\|_{W^{0,q}(\partial K)} \leq M \left(h_K^{-1/q} \|v\|_{W^{0,q}(K)} + h_K^{1-1/q} \|v\|_{W^{1,q}(K)} \right).$$

Le système linéaire Le problème approché (1.5) est simplement un système linéaire. Notons par:

$$N = \dim W_h \text{ et } M = \dim V_h$$

Soit $(\psi_1, ..., \psi_N)$ une base de W_h et $(\varphi_1, ..., \varphi_M)$ une base de V_h . Introduisons la matrice de rigidité A dans $\mathbb{R}^{N,M}$ ayant pour coefficients:

$$A_{ij} = (\psi_i, \varphi_j), \ 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq M.$$

Introduisons également la décomposition de u_h dans la base de W_h comme suit:

$$u_h = \sum_{i=1}^{N} u_i \psi_i.$$

Par la suite, le problème (1.5) revient à trouver $u_1, ..., u_N$ dans W_h tels que:

$$\sum_{i=1}^{N} u_i a(\psi_i, v_h) = f(v_h), \text{ pour tout } v_h \text{ dans } V_h,$$

où encore par linéarité de $a(.,.)$ et f, il s'agit de trouver $u_1, ..., u_N$ dans W_h tels que:

$$\sum_{i=1}^{N} u_i a(\psi_i, \varphi_j) = f(\varphi_j), \text{ pour tout } j = 1, ..., M,$$

c'est-à-dire il s'agit de résoudre le systéme linéaire suivant:

$$\begin{pmatrix} (\psi_1, \varphi_1) & \cdots & (\psi_N, \varphi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\psi_1, \varphi_M) & \cdots & (\psi_N, \varphi_M) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\varphi_1) \\ \vdots \\ f(\varphi_M) \end{pmatrix},$$

par les techniques d'analyse numérique habituelles et qui s'écrit sous la forme matricielle suivante:

$$AU = F,$$

où nous avons introduit le membre de droite F dans $\mathbb{R}^N$ de composante:

$$F_j = f(\varphi_j)\,, \ 1 \leq j \leq M.$$

La matrice A est a priori pleine. Toutefois, pour limiter le volume de calcul, on va définir des fonctions de bases ψ_i dont le support sera petit, c'est-à-dire, chaque fonction ψ_i sera nulle partout sauf sur quelques mailles. Ainsi les termes $a(\psi_i, \varphi_j)$ seront le plus souvent nuls, car ils correspondent à des fonctions ψ_i et φ_j de supports disjoints. La matrice A sera donc une matrice creuse, et on ordonnera les ψ_i de telle sorte que A soit de structure bande, avec une largeur de bande la plus petite possible.

Interprétation de u_h

On a:

$$a(u, v) = f(v)\,, \text{ pour tout } v \text{ dans} V. \tag{1.7}$$

Donc en particulier:

$$a(u, v_h) = f(v_h), \text{ pour tout } v_h \text{ dans } V_h, \tag{1.8}$$

car V_h inclus dans V. Par ailleurs,

$$a(u_h, v_h) = f(v_h)\,, \text{ pour tout } v_h \text{ dans } V_h.$$

Par soustraction de (1.7) et (1.8), on déduit que:

$$a(u - u_h, v_h) = 0, \text{ pour tout } v_h \text{ dans } V_h. \tag{1.9}$$

Dans le cas où $a(.,.)$ est symétrique, il s'agit d'un produit scalaire sur V, u_h peut alors être interprété comme la projection orthogonale de u sur V_h au sens de $a(.,.)$.

3.1.4 Estimation d'erreur a priori

Dans cette section, nous nous plaçerons systématiquement dans le cadre des hypothèses du théorème de Nečas et du corollaire 1.2 de sorte que le problème (1.1) et son approché sont bien posés. Nous notrons u et u_h leurs solutions respectives et $e_h = u - u_h$ l'erreur d'approximation.

Lemma 3.1.5. ***(Céa)*** *Avec les hypothèses ci-dessous, on a*

$$\|u - u_h\|_W \leq \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha_h}\right) \inf_{w_h \in W_h} \|u - w_h\|_W \tag{1.10}$$

Proof. (Voir référence [1]) □

3.2 Méthodes spectrales

3.2.1 Principe général

Les méthodes spectrales sont des méthodes d'approximation des solutions des équations aux dérivées partielles (stationnaires ou d'évolution); ces méthodes font appel à des polynômes appartenant à la famille des polynômes de Jacobi de la forme:

$$P_k^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2^k} \sum_{l=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k+\alpha \\ l \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} k+\beta \\ k-l \end{array} \right) (x-1)^l (x+1)^{k-1}, \quad \forall x \in [-1,1]$$

par rapport à la fonction poids:

$$\omega(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$$

Dans ce travail on s'interesse à l'approximation de la solution d'un problème de contrôle optimal elliptique par les méthodes spactrales, en particulier on va utiliser les polynômes de Legendre (où $\alpha = \beta = 0$) et on abordera la méthode d'approximation de Galerkin. Il est à noter que dans le cas unidimensionel on se place dans l'intervalle $\Lambda = [-1,1]$, et dans le cas bidimensionel on se place dans le carré $\Omega = [-1,1]^2$.

On introduit brièvement les méthodes spectrales en considérant le problème suivant:

$$\begin{cases} Lu + f = 0 \\ + \text{ Conditions au bord et/ou initiales} \end{cases} \tag{2.1}$$

où L est un opérateur différentiel (stationnaire ou d'évolution) ou une intégrale. Notre soucis est d'approximer la solution u du problème posé où le principe des méthodes spectrales repose sur le fait d'écrire la solution u sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions polynomiales φ_N connues au préalable. Ces polynômes font partie de la famille des polynômes de Jacobi (définis précédemment) ceci est interprété comme suit:

$$u_N = \sum_{i=0}^{N+1} u_i \varphi_N \tag{2.2}$$

En remplaçant la relation (2.2) dans l'équation (2.1) on définie le résidu ou l'erreur de l'approximation comme suit:

$$R_{N+1}(u_0, u_1, ..., u_{N+1}) = Lu_N + f \tag{2.3}$$

Ainsi notre but est de pouvoir calculer les coefficients u_i pour $i = 1, ..., N+1$ et d'essayer de rendre le residu le plus petit possible.

3.2.2 Polynômes orthogonaux

Definition 3.2.1. *Etant donnée une fonction $\omega(x)$ positive et intégrable sur le domaine Ω, on appelle un ensemble de polynômes orthogonaux sur Ω par rapport à la fonction poids $\omega(x)$ tout ensemble $\{p_k\}_k$ (tel que k est le degré des polynômes) vérifiant la relation:*

$$\begin{aligned}(p_i, p_j)_{\omega(x)} &= \int_\Omega p_i(x)p_j(x)\omega(x)dx \\ &= \delta_{ij}\end{aligned}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Polynômes de Legendre

Les polynômes orthogonaux les plus simples sont les polynômes de Legendre; ils sont définis sur l'intervalle $[-1, 1]$ où la fonction poids est la fonction constante de valeur 1. On les note L_k où k est le degré du polynôme; par suite on a la relation d'orthogonalité par rapport aux plynômes de Legendre suivante:

$$\int_\Lambda L_i(x)L_j(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{ij}.$$

On peut les définir par la relation de recurrence à trois terme suivante:

$$\begin{cases} L_0(x) = 1 \\ L_1(x) = x \\ L_{k+1}(x) = \frac{2k+1}{k+1} x L_k(x) - \frac{k}{k+1} L_{k-1}(x), \text{ pour tout } x \text{ dans } [-1,1] \end{cases}$$

3.2.3 Méthode d'approximation de Galerkin

Il existe plusieures techniques de determination des coefficients d'approximation, dans ce travail nous allons aborder une seule qui est la méthode de Galerkin. C'est une méthode d'approximation variationnelle et son principe consiste à définir une base de fonctions $\{\Phi_i\}_i$ où $i = 0, ..., N+1$ qui sont (dans notre cas) une combinaison linéaire des polynômes de Legendre sous la forme:

$$\Phi_i(x) = L_i(x) + a_i L_{i+1}(x) + b_i L_{i+2}(x).$$

Ces nouvelles fonctions de bases $\{\Phi_i\}_i$ où $i = 0, ..., N+1$ doivent satisfaire les conditions au bord imposées dans le problème (2.1), et le résidu doit être orthogonal à ces dernières. Ainsi on définit la solution approchée u_N de u comme suit:

$$u_N = \sum_{i=0}^{N+1} u_i \Phi_i.$$

3.2.4 Erreur d'approximation polynômiale en dimension une

On note par π_N l'opérateur de la projection orthogonale de $L^2(\Lambda)$ sur $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ où $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à N par rapport à la variable x.

Ceci signifie que pour toute fonction u de $L^2(\Lambda)$, $\pi_N u$ appartient à $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ et vérifie:

$$\text{Pour tout } \psi_N \text{ dans } \mathbb{P}_N(\Lambda), \quad \int_\Lambda (u - \pi_N u)(\zeta)\psi_N(\zeta) d\zeta = 0.$$

Pour des raisons de calcul, on ne considère que la série tronquée d'ordre N, et en appliquant l'opérateur π_N, on obtient:

$$\pi_N u \backsimeq \sum_{i=0}^{N} u_i L_i.$$

Theorem 3.2.1. *Pour tout entier $m \geq 0$, il existe une constante c positive ne dépendant que de m telle que, pour toute fonction u de $H^m(\Lambda) \cap H_0^1(\Lambda)$, on ait:*

$$\|u - \pi_N u\|_{L^2(\Lambda)} \leq CN^{-m} \|u\|_{H^m(\Lambda)}.$$

3.2.5 Erreur d'approximation polynômiale en dimension deux

Pour la suite, on note par Π_N l'opérateur de la projection orthogonale de $L^2(\Omega)$ sur $\mathbb{P}_N(\Omega)$ sachant que $\mathbb{P}_N(\Omega)$ est l'espace des polynômes sur Ω de degré inférieur ou égal à N par rapport a chaque variable x et y, qui n'est autre que l'espace des polynômes en x sur Λ de degré inférieur ou égal à N, à coefficients dans l'espace $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ de degré inférieur ou égal à N par rapport à la variable y. Le passage du cas unidimentionnel au cas bidimentionnel repose essentiellement sur un argument de tensorisation (voir référence [3]).

Par suite on a le théorème suivant de l'estimation d'erreur d'approximation polynômiale en dimension deux:

Theorem 3.2.2. *Pour tout entier $m \geq 0$, il existe une constante C positive ne dépendant que de m telle que, pour toute fonction u de $H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, on ait:*

$$\left\|u - \Pi_N^{1,0} u\right\|_{L^2(\Omega)} \leq CN^{-m} \|u\|_{H^m(\Omega)}.$$

Chapter 4

Erreurs a priori de la discrétisation d'un problème de contrôle optimal elliptique

Dans ce chapitre on abordera un problème de contrôle optimal elliptique on donnera les conditions nécessaires d'optimalité, on abordera la discrétisation du problème par la méthode des éléments finis et une méthode spectrale et on finira par donner des résultats sur des estimations des erreurs a priori sur l'état, le contrôle et la fonction objectif.

4.1 Erreurs de discrétisation par la méthode des éléments finis

4.1.1 Position du problème de contrôle optimal

On va étudier un problème de contrôle optimale gouverné par une équation elliptique, on verra l'utilité de la méthode des éléments finis dans la discrétisation d'une équation reliée à un problème de contrôle. En effet, on considère les espaces d'Hilbert H, U et V, où H et U sont identifiés chacun par son dual.

Soit V' le dual de V et on suppose que $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ et que:

$$\|v\|_H \leq \|v\|_V \text{, pour tout } v \text{ dans } V \tag{3.1}$$

On suppose que U_{ad} est un ensemble convexe fermé non vide de U; on considère à présent l'opérateur linéaire et continu B de U dans H et son adjoint

B^* de H dans U.

Dans ce cas on considère le problème de contrôle optimal où il s'agit de minimiser $g(y) + f(u)$ avec:

$$g(y) = \frac{1}{2} \|y - y_d\|_H^2 ,$$

où y dans V et y_d dans V un élèment donné.

$$f(u) = \frac{1}{2} \|u\|_U^2 , \text{ où } u \text{ dans } U_{ad,}$$

soumise à l'équation d'état:

$$a(y, v) = (Bu, v)_H , \text{ pour tout } v \text{ dans } V. \tag{3.1.1}$$

La fonctionnelle coût J de $V \times U$ dans $\mathbb{R}$ est donnée par:

$$J(y, u) = \frac{1}{2} \|y - y_d\|_H^2 + \frac{1}{2} \|u\|_U^2 + I_{U_{ad}}(u) . \tag{3.1.2}$$

où $I_{U_{ad}}$ est la fonction indicatrice de l'ensemble convexe U_{ad} et y_d dans V est un élément donné.

On aura ainsi le problème de contrôle optimale :

(P): minimiser $J(y, u)$ définie en (3.1.2) pour u dans U et y dans V soumise à l'équation d'état définie en (3.1.1)

On introduit l'état adjoint p dans V et l'équation de l'état adjoint qu'on définie par:

$$a(p, v) = (y - y_d, v)_H, \text{ pour tout } v \text{ dans } V \tag{3.1.3}$$

On considère aussi la fonctionnelle coût $\phi(u) = J(y, u)$, où y est la solution de (3.1.1), soit $(u + \lambda w, y + \lambda\theta)$ une incrémentation de la paire optimale (u, y). De la condition d'optimalité:

$$\phi(u + \lambda w) \geq \phi(u) , \text{ pour tout } w \text{ dans } U.$$

Après un calcul direct, on déduit:

$$(y - y_d, \theta)_H + (u, w)_U + \frac{\lambda}{2} \left[\|w\|_U^2 + \|\theta\|_U^2\right] + \frac{1}{\lambda} \left[I_{U_{ad}}(u + \lambda w) - I_{U_{ad}}(u)\right] \geq 0.$$

En faisant tendre λ vers 0, on obtient:

$$(y - y_d, \theta)_H + (u, w)_U + I'_{U_{ad}}(u, w) \geq 0, \text{ pour tout } w \text{ dans } U. \tag{3.1.4}$$

où $I'_{U_{ad}}$ est la dérivée directionnelle de $I_{U_{ad}}$.

On écrit (3.1.1) pour $(u+\lambda w,\, y+\lambda\theta)$ et $(u,\, y)$ et on obtient par soustraction:

$$a\,(\theta, v) = (Bw, v)_H\,, \text{ pour tout } v \text{ dans } V \tag{3.1.5}$$

On prend $v = \theta$ dans (3.1.3), il vient:

$$a(p, \theta) = (y - y_d, \theta)_H, \text{ pour tout } \theta \text{ dans } V \tag{3.1.6}$$

En prenant $v = p$ dans (3.1.5); en utilisant la symétrie de $a\,(.,.)$, on a:

$$a(p, \theta) = (Bw, p)_H\,.$$

De l'égalité ci-dessus et (3.1.6), on trouve:

$$(y - y_d, \theta)_H = (B^* p, w)_U\,.$$

On introduit cette dernière dans (3.1.4), on obtient:

$$(u + B^* p, w)_U + I'_{U_{ad}}\,(u, w) \geq 0, \text{ pour tout } w \text{ dans } U.$$

Ainsi, on trouve:

$$0 \in u + B^* p + \partial I_{U_{ad}}\,(u) \tag{3.1.7}$$

Où la sous-différentielle $\partial I_{U_{ad}}\,(u)$ est définie par:

$$\partial I_{U_{ad}}\,(u) = \left\{z;\;\; (z, w-u)_U \leq 0, \text{ pour tout } w \text{ dans } U_{ad}\right\},$$

Ainsi les conditions nécessaires d'optimalité sont données par (3.1.1), (3.1.3) et (3.1.7).

4.1.2 Discrétisation du problème de contrôle optimal

On va écrire le problème discret, pour cela on introduit la famille $\{V_h\}_{h>0}$ des sous-espaces de dimensions finis de V et la famille $\{U_h\}_{h>0}$ correspondant à U . Considérons aussi la famille des sous-ensembles non vides fermés convexes $\left\{U_{ad}^h\right\}_{h>0}$, où U_{ad}^h inclus dans U_{ad}. On introduit notamment les opérateurs de projection: π_h de V dans V_h et π_h^U de U dans U_h.

On introduit également l'hypothèse:

HYPOTHESE 1:

$U_{ad}^h \subset U_{ad}$ pour tout $h > 0$.

La discrétisation de Galerkin qui correspond à l'équation d'état est donnée par:

$$a(y_h, v_h) = (Bu_h, v_h)\,, \text{ pour tout } v_h \text{ dans } V_h \tag{3.1.8}$$

La fonctionnelle coût est donnée par:

$$J_h(y_h, u_h) = \frac{1}{2}\left\|y_h - \pi_h y_d\right\|_H^2 + \frac{1}{2}\left\|u_h\right\|_U^2 + I_{U_{ad}^h}(u_h) \tag{3.1.9}$$

On introduit le problème de contrôle optimal :

(P_h): minimiser $J_h(y_h, u_h)$ défini par (3.1.9) pour u_h dans U_h et y_h dans V_h soumise à l'équation d'état définie en (3.1.8).

Soit p_h dans V_h l'état adjoint qui satisfait l'équation de l'état adjoint suivante:

$$a(p_h, v_h) = (y_h - \pi_h y_d, v_h)\,, \text{ pour tout } v_h \text{ dans } V_h \tag{3.1.10}$$

et comme d'habitude on a la condition d'optimalité:

$$0 \in u_h + B^* p_h + \partial I_{U_{ad}^h}(u_h) \tag{3.1.11}$$

Les conditions nécéssaires d'optimalité pour le problème (P_h) sont données par (3.1.8), (3.1.10) et (3.1.11).

4.1.3 Estimations des erreurs a priori

Dans ce qui suit on va aborder des théorèmes illustrant les estimations des erreurs a priori dûes à la discrétisation du problème de contrôle optimal elliptique par la méthode des éléments finis.

Notons par $(\bar{u}, \bar{y})$ et par $(\bar{u}_h, \bar{y}_h)$ les solutions optimales respectivement des problèmes (P) et (P$_h$). On introduit notamment les variables d'interpolation suivantes:

-r_h la solution de l'équation :

$$a(r_h, v_h) = (B\bar{u}, v_h)_H\,, \text{ pour tout } v_h \text{ dans } V_h \tag{3.1.12}$$

-q_h la solution de l'équation:

$$a(q_h, v_h) = (r_h - \pi_h y_d, v_h)_H\,, \text{ pour tout } v_h \text{ dans } V_h \tag{3.1.13}$$

-s_h la solution de l'équation:

$$a(s_h, v_h) = (\bar{y} - y_d, v_v)_H\,, \text{pour tout } v_h \text{ dans } V_h \tag{3.1.14}$$

Lemma 4.1.1. *Les relations suivantes sont satisfaites:*

$$(B^*p_h - B^*q_h, \bar{u}_h - \bar{u})_U \geq 0 \tag{3.1.15}$$

$$(z_h - z, \bar{u}_h - \bar{u})_U \geq (z_h, \bar{u}_h - \bar{u})_U \tag{3.1.16}$$

avec

$$z = -(B^*p + \bar{u}) \tag{3.1.17}$$

et

$$z_h = -\left(B^*p_h + \bar{u}_h\right) \tag{3.1.18}$$

Proof. D'aprés l'équation (3.1.8), on a:

$$a\left(\bar{y}_h, p_h - q_h\right) = \left(B\bar{u}_h, p_h - q_h\right)_H.$$

De l'équation (3.1.12), on obtient:

$$a(r_h, p_h - q_h) = \left(B\bar{u}, p_h - q_h\right)_H.$$

Ainsi, en utilisant les relations ci-dessus, on obtient:

$$\begin{aligned}
\left(B\bar{u}_h - B\bar{u}, p_h - q_h\right)_H &= \left(B\bar{u}_h, p_h - q_h\right)_H - \left(B\bar{u}, p_h - q_h\right)_H \\
&= a\left(\bar{y}_h, p_h - q_h\right) - a(r_h, p_h - q_h) \\
&= a\left(\bar{y}_h - r_h, p_h - q_h\right) \\
&= a\left(\bar{y}_h - r_h, p_h\right) - a\left(\bar{y}_h - r_h, q_h\right).
\end{aligned}$$

D'aprés l'équation (3.1.10), on obtient:

$$a\left(p_h, \bar{y}_h - r_h\right) = \left(\bar{y}_h - \pi_h y_d, \bar{y}_h - r_h\right)_H,$$

et de l'équation (3.1.13), on obtient:

$$a(q_h, \bar{y}_h - r_h) = \left(r_h - \pi_h y_d, \bar{y}_h - r_h\right)_H.$$

D'aprés ce qui précède, on obtient:

$$\begin{aligned}
\left(B\bar{u}_h - B\bar{u}, p_h - q_h\right)_H &= \left(\bar{y}_h - \pi_h y_d, \bar{y}_h - r_h\right)_H - \left(r_h - \pi_h y_d, \bar{y}_h - r_h\right)_H \\
&= \|\bar{y}_h - r_h\|_H^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Par suite, on obtient (3.1.15).

A partir des équations (3.1.7) et (3.1.17), il en résulte que $z \in \partial I_{U_{ad}}(\bar{u})$ et en utilisant la définition de la sous-différentielle et l'hypothèse 1, on obtient:

$$-\left(z, \bar{u}_h - \bar{u}\right)_U \geq 0,$$

d'où:

$$\left(z_h - z, \bar{u}_h - \bar{u}\right)_U = \left(z_h, \bar{u}_h - \bar{u}\right)_U - \left(z, \bar{u}_h - \bar{u}\right)_U \geq \left(z_h, \bar{u}_h - \bar{u}\right)_U,$$

prouvant ainsi (3.1.16). □

Theorem 4.1.1. *Soit $(\bar{u}, \bar{y})$ la solution optimale du problème (P) et $(\bar{u}_h, \bar{y}_h)$ celle du problème (P_h). Alors, on a:*

$$\|\bar{u}_h - \bar{u}\|_U^2 \leq c\left\|\pi_h^U \bar{u} - \bar{u}\right\|_U + \|B^* p - B^* q_h\|_U \|\bar{u}_h - \bar{u}\|_U \tag{3.1.19}$$

où $c > 0$ est une constante qui ne dépend pas de h.

Proof. D'aprés les équations (3.1.17) et (3.1.18), on a:

$$B^* p - B^* q_h = \left(B^* p_h - B^* q_h\right) + \left(\bar{u}_h - \bar{u}\right) + \left(z_h - z\right).$$

Donc

$$\left(B^* p - B^* q_h, \bar{u}_h - \bar{u}\right)_U = \left(B^* p_h - B^* q_h, \bar{u}_h - \bar{u}\right)_U + \|\bar{u}_h - \bar{u}\|_U^2 + \left(z_h - z, \bar{u}_h - \bar{u}\right)_U$$

En utilisant les équations (3.1.15) et (3.1.16), on obtient:

$$\left(B^* p - B^* q_h, \bar{u}_h - \bar{u}\right)_U \geq \|\bar{u}_h - \bar{u}\|_U^2 + \left(z_h, \bar{u}_h - \bar{u}\right)_U \tag{3.1.20}$$

On a:

$$\left(z_h, \bar{u}_h - \bar{u}\right)_U = \left(z_h, \bar{u}_h - \pi_h^U \bar{u}\right)_U + \left(z_h, \pi_h^U \bar{u} - \bar{u}\right)_U \tag{3.1.21}$$

Des équations (3.1.18) et (3.1.7), on a $\quad z_h = -\left(B^* p_h + \bar{u}_h\right) \in \partial I_{U_{ad}}\left(\bar{u}_h\right)$ et donc:

$$\left(z_h, \bar{u}_h - w_h\right)_U \geq 0, \text{ pour tout } w_h \in U_h.$$

On prend $w_h = \pi_h^U \bar{u}$, on obtient:

$$\left(z_h, \bar{u}_h - \pi_h^U u\right)_U \geq 0.$$

D'après l'équation (3.1.21), on trouve:

$$(z_h, \bar{u}_h - \bar{u})_U \geq \left(z_h, \pi_h^U \bar{u} - \bar{u}\right)_U .$$

D'où:

$$(z_h, \bar{u}_h - \bar{u})_U \geq - \|z_h\|_U \left\|\pi_h^U \bar{u} - \bar{u}\right\|_U .$$

On pose $\|z_h\|_U \leq c$, et en tenant compte de l'équation (3.1.18), il s'ensuit que:

$$(z_h, \bar{u}_h - \bar{u})_U \geq -c \left\|\pi_h^U \bar{u} - \bar{u}\right\|_U \tag{3.1.22}$$

Les équations (3.1.20) et (3.1.22) nous permettent de conclure le resultat cherché (l'équation (3.1.19)). □

On va à présent introduire des hypothèses qui nous seront utiles dans ce qui suit . On commence par introduire l'équation variationnelle :

$$a(y, v) = (\varphi, v)_H , \text{ pour tout } v \text{ dans } V \tag{EV}$$

Et sa disrétisation de Galerkin suivante:

$$a(y_h, v_h) = (\varphi, v_h)_H , \text{ pour tout } v_h \text{ dans } V_h \tag{EV$_h$}$$

Maintenant on introduit les hypothèses:

HYPOTHESE 2:

Soit y la solution de (EV) et y_h la solution de (EV$_h$), alors on a les estimations :

$$\|y - y_h\|_V \leq ch^q,$$

et

$$\|y - y_h\|_H \leq ch^q.$$

HYPOTHESE 3:

Soit $y_d \in V$ alors on a:

$$\|\pi_h y_d - y_d\|_V \leq ch^q,$$

et

$$\|\pi_h y_d - y_d\|_H \leq ch^q.$$

HYPOTHESE 4:

Soit le conrôle optimal $\bar{u}$, alors on a:

$$\|\pi_h \bar{u} - \bar{u}\|_U \leq ch^q,$$

où c est une constante positive qui ne dépend pas de h et $q \geq 1$ est un entier.

Theorem 4.1.2. *Soit $\bar{u}$ le contrôle optimal du problème (P) et $\bar{u}_h$ le contrôle optimal de (P_h). On suppose que les deux hypothèses 1 et 4 sont satisfaites et que $\gamma > \frac{q}{2}$. Alors les contrôles optimaux vérifient:*

$$\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_U = O(h^\gamma).$$

Proof. à partir de l'hypothèse 4, on a:

$$\|\pi_h \bar{u} - \bar{u}\|_U \leq ch^q. \tag{3.1.27}$$

Tout d'abord on applique l'hypothèse 2 aux équations (3.1.1) et (3.1.9) en prenant $\varphi = B\bar{u}$ et on obtient:

$$\|\bar{y} - r_h\|_V \leq ch^q \tag{3.1.28}$$

La relation (3.1) donne:

$$\|\bar{y} - r_h\|_H \leq ch^q \tag{3.1.29}$$

Où $\bar{y}$ est l'état optimal du problème (P).

De la même façon, en appliquant l'hypothèse 2 aux équations (3.1.3) et (3.1.14), on obtient:

$$\|p - s_h\|_H \leq ch^q \tag{3.1.30}$$

D'aprés les équations (3.1.13) et (3.1.14) et par soustraction, on trouve:

$$a\left(s_h - q_h, v_h\right) = \left(\bar{y} - r_h, v_h\right)_H + \left(\pi_h y_d - y_d, v_h\right)_H, \text{ pour tout } v_h \text{ dans } V_h$$

On prend $v_h = s_h - q_h$ et en utilisant la coercivité de $a(.,.)$, on obtient:

$$\alpha \left\|s_h - q_h\right\|_H^2 \leq \alpha \left\|s_h - q_h\right\|_V^2 \leq \left(\|\bar{y} - r_h\|_H + \|\pi_h y_d - y_d\|_H\right) \|s_h - q_h\|_H$$

et donc:

$$\|s_h - q_h\|_H \leq \alpha^{-1} \left(\|\bar{y} - r_h\|_H + \|\pi_h y_d - y_d\|_H\right) \tag{3.1.31}$$

à partir de l'hypothèse 3, on a aussi:

$$\|\pi_h y_d - y_d\|_H \leq ch^q \tag{3.1.32}$$

En remplaçant les èquations (3.1.29) et (3.1.32) dans l'équation (3.1.31), il vient:

$$\|s_h - q_h\|_H \leq \alpha^{-1} ch^q,$$

et donc:

$$\|s_h - q_h\|_H \leq ch^q \tag{3.1.33}$$

et

$$\|p - q_h\|_H \leq \|p - s_h\|_H + \|s_h - q_h\|_H .$$

En utilisant (3.1.30) et (3.1.33), on obtient:

$$\|p - q_h\|_H \leq ch^q.$$

Par suite il vient:

$$\|B^* p - B^* q_h\|_U \leq ch^q \tag{3.1.34}$$

En utilisant l'équation (3.1.20) et en tenant compte des équations (3.1.27) et (3.1.34) avec $\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_U = O\left(h^\gamma\right)$, on a:

$$h^{2\gamma} \leq h^q + h^{q+\gamma} = h^q\left(1 + h^\gamma\right) > 2h^q,$$

et on obtient donc $\gamma > \frac{q}{2}$ □

On introduit l'hypothèse suivante:

HYPOTHESE 5:

Pour l'état optimal $\bar{y}$ on a l'estimation suivante:

$$\|\pi_h \bar{y} - \bar{y}\|_V \leq ch^\gamma, \tag{3.1.35}$$

où $c > 0$ une constante qui ne dépend pas de h, et $\gamma > \frac{q}{2}$.

On est maintenant en mesure de donner une estimation pour les états optimaux.

Theorem 4.1.3. *Soit $\bar{y}$ l'état optimal du problème (P) et $\bar{y}_h$ l'état optimal du problème (P_h). On suppose que les hypothèses 1 et 5 sont satisfaites. Alors avec:*

$$\|\bar{y} - r_h\|_V = O(h^q) \tag{3.1.36}$$

où r_h est la solution de l'équation (3.1.12), on a:

$$\|\bar{y} - \bar{y}_h\|_V = O(h^\gamma) \tag{3.1.37}$$

Proof. Puisque l'équation (3.1.36) est exactement l'équation (3.1.28), nous n'allons aborder que la preuve de (3.1.37).

Soit v_h dans V_h, en utilisant l'équation (3.1.8) et la coercivité de $a(.,.)$, on trouve:

$$\alpha \|\bar{y}_h - v_h\|_V^2 \leq (B\bar{u}_h, \bar{y}_h - v_h)_H - a(v_h, \bar{y}_h - v_h) \tag{3.1.38}$$

De l'équation (3.1.1), on obtient aussi:

$$\begin{aligned} a(\bar{y} - v_h, \bar{y}_h - v_h) &= a(\bar{y}, \bar{y}_h - v_h) - a(v_h, \bar{y}_h - v_h) \\ &= (B\bar{u}_h, \bar{y}_h - v_h)_H - a(v_h, \bar{y}_h - v_h). \end{aligned}$$

On déduit:

$$-a(v_h, \bar{y}_h - v_h) = a(\bar{y} - v_h, \bar{y}_h - v_h) - (B\bar{u}, \bar{y}_h - v_h)_H .$$

Qui a été introduite en (3.1.38), pour obtenir:

$$\alpha \|\bar{y}_h - v_h\|_V^2 \leq a(\bar{y} - v_h, \bar{y}_h - v_h) + (B(\bar{u}_h - \bar{u}), \bar{y}_h - v_h)_H .$$

En utilisant la continuité et la coercivité de $a(.,.)$, et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient:

$$\alpha \|\bar{y}_h - v_h\|_V^2 \leq M \ \|\bar{y} - v_h\|_V \|\bar{y}_h - v_h\|_V + \|B\| \|\bar{u}_h - \bar{u}\|_V \|\bar{y}_h - v_h\|_V ,$$

et donc:

$$\|\bar{y}_h - v_h\|_V \leq M\alpha^{-1} \|\bar{y} - v_h\|_V + \alpha^{-1} \|B\| \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_U \tag{3.1.39}$$

On introduit l'équation (3.1.39) dans:

$$\|\bar{y} - \bar{y}_h\|_V \leq \|\bar{y} - v_h\|_V + \|\bar{y}_h - v_h\|_V .$$

Finallement on obtient:

$$\|\bar{y} - \bar{y}_h\|_V \leq c(\|\bar{y} - v_h\|_V + \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_U), \text{ pour tout } v_h \text{ dans } V_h \tag{3.1.40}$$

On prend $v_h = \pi_h \bar{y}$ dans l'équation (3.1.40) et on utilise l'hypothèse 5 et l'équation (3.1.26) du théorème. On conclue la preuve.

□

Theorem 4.1.4. *Soit $(\bar{u}, \bar{y})$ la solution optimale du problème (P) et $(\bar{u}_h, \bar{y}_h)$ celle du problème (P_h). On assume que les hypothèses 1 et 5 sont satisfaites. Alors on a:*

$$|J(\bar{y}, \bar{u}) - J_h(\bar{y}_h, \bar{u}_h)| = O(h^\gamma) \tag{3.1.41}$$

Proof. D'après les définitions des fonctionnelles coût J et J_h et en tenant compte du fait que $I_K(\bar{u}) = I_{K_h}(\bar{u}_h)$, on obtient:

$$|J(\bar{y}, \bar{u}) - J_h(\bar{y}_h, \bar{u}_h)| \leq \frac{1}{2}\left|\|\bar{y} - y_d\|_H^2 - \|\bar{y}_h - \pi_h y_d\|_H^2\right| + \frac{1}{2}\left|\|\bar{u}\|_U^2 - \|\bar{u}_h\|_U^2\right| \tag{3.1.42}$$

Avec

$$\begin{aligned}
\left|\|\bar{y} - y_d\|_H^2 - \|\bar{y}_h - \pi_h y_d\|_H^2\right| &\leq (\|\bar{y}\|_H + \|y_d\|_H + \|\bar{y}_h\|_H + \|\pi_h y_d\|_H) \\
&\quad \cdot \left|\|\bar{y} - y_d\|_H - \|\bar{y}_h - \pi_h y_d\|_H\right| \\
&\leq c\,\|(\bar{y} - y_d) - (\bar{y}_h - \pi_h y_d)\|_H \\
&\leq c(\|(\bar{y} - \bar{y}_h)\|_H + \|(y_d - \pi_h y_d)\|_H) \\
&\leq c(\|(\bar{y} - \bar{y}_h)\|_V + \|(y_d - \pi_h y_d)\|_H).
\end{aligned}$$

En utilisant l'équation (3.1.36) ainsi que l'hypothèse (3), on trouve:

$$\left|\|\bar{y} - y_d\|_H^2 - \|\bar{y}_h - \pi_h y_d\|_H^2\right| = O(h^\gamma) \tag{3.1.43}$$

On a aussi:

$$\left|\|\bar{u}\|_U^2 - \|\bar{u}_h\|_U^2\right| = (\|\bar{u}\|_U + \|\bar{u}_h\|_U)\left|\|\bar{u}\|_U - \|\bar{u}_h\|_U\right| \leq c\,\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_U\,,$$

et de l'équation (3.1.26), on obtient:

$$\left|\|\bar{u}\|_U^2 - \|\bar{u}_h\|_U^2\right| = O(h^\gamma) \tag{3.1.44}$$

On conclue, en remplaçant (3.1.43) et (3.1.44) dans (3.1.42). □

4.2 Erreurs de discrétisation par la méthode spectrale

4.2.1 Position du problème de contrôle optimal

On va maintenant présenter les choses de façon formelle. On va traiter un problème de contrôle optimale gouverné par une équation aux dérivées partielles elliptique, on verra notamment la discrétisation d'une équation reliée à un problème de contrôle optimal par la méthode spectrale. On considère V' le dual de V et on suppose que $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$. On considère à présent l'opérateur linéaire et continu B de U dans V' et son adjoint B^*de V dans U. On écrit l'équation d'état sous la forme:

$$a(y,v) = (Bu,v), \text{ pour tout } v \text{ dans } V \tag{3.2.1}$$

et la fonctionnelle coût dans ce cas est donnée par:

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\|y - y_d\|_H^2 + \frac{1}{2}\|u\|_U^2 \tag{3.2.2}$$

où y_d dans V est un élément donné.

On aura ainsi le problème de contrôle optimale :

(P): minimiser $J(y,u)$ définie en (3.2.2) pour u dans U et y dans V soumise à l'équation d'état définie par le problème (3.2.1).

On introduit l'état adjoint p dans V et l'équation de l'état adjoint qu'on définie par:

$$a(p,v) = (y - y_d, v), \text{ pour tout } v \text{ dans } V \tag{3.2.3}$$

l'équation de projection dans ce cas est donnée comme suit:

$$u + B^*p = 0 \tag{3.2.4}$$

Ainsi, les conditions necessaires d'optimalité sont données par (3.2.1), (3.2.3) et (3.2.4).

4.2.2 Discrétisation du problème de contrôle optimal

On va écrire le problème discret, pour cela on introduit l'espace $\mathbb{X}_N(\Omega)$ défini comme étant l'ensemble des plynômes de degré $\leq N$ dans Ω et on introduit les espaces de dimension finie suivant: $V_N = \mathbb{X}_N(\Omega) \cap V$, $H_N = \mathbb{X}_N(\Omega) \cap H$ et $U_N = \mathbb{X}_N(\Omega) \cap U$. On introduit notamment les opérateurs de projection: π_N de V dans V_N et π_N^U de U dans U_N, par suite la discrétisation de Galerkin de l'équation d'état est donnée par:

$$a(y_N, v_N) = (Bu_N, v_N), \text{ pour tout } v_N \text{ dans } V_N \tag{3.2.5}$$

et la fonctionnelle coût est donnée par:

$$J_N(y_N, u_N) = \frac{1}{2}\|y_N - \pi_N y_d\|_H^2 + \frac{1}{2}\|u_N\|_U^2 \tag{3.2.6}$$

Dans ce cas on introduit le problème de contrôle optimal discret sous la forme:

(P_N): minimiser $J_N(y_N, u_N)$ pour u_N dans U_N et y_N dans V_N soumise à l'équation d'état définie par (3.2.5).

Soit p_N dans V_N l'état adjoint qui satisfait l'equation de l'état adjoint suivante:

$$a(p_N, v_N) = (y_N - \pi_N y_d, v_N), \text{ pour tout } v_N \in V_N \tag{3.2.7}$$

et comme d'habitude on a la condition d'optimalité:

$$u_N + B^* p_N = 0 \tag{3.2.8}$$

Les conditions nécéssaires d'optimalité pour le problème (P_N) sont données par les équations (3.2.5), (3.2.7) et (3.2.8).

4.2.3 Estimations des erreurs a priori

Dans ce qui suit on va aborder des théorèmes illustrant les estimations des erreurs a priori entre le problème de contrôle optimal exacte et celui aproché par la méthode spectrale de Legendre. Nous allons au fure et à mesure donner des notions et des hypothèses nécéssaires dans les démonstrations qui vont suivre.

Notons par $(\bar{u}, \bar{y})$ et $(\bar{u}_N, \bar{y}_N)$ les solutions optimales respectivement du problème (P) et (P_N). On introduit notamment les variables d'interpolation suivantes:

-r_N la solution de l'équation :

$$a(r_N, v_N) = (B\bar{u}, v_N), \text{ pour tout } v_N \text{ dans } V_N \tag{3.2.9}$$

-q_N la solution de l'équation:

$$a(q_N, v_N) = (r_N - \pi_N y_d, v_N)_H\,, \text{ pour tout } v_N \text{ dans } V_N \tag{3.2.10}$$

-s_N la solution de l'équation:

$$a(s_N, v_N) = (\bar{y} - y_d, v_N)_H\,, \text{ pour tout } v_N \text{ dans } V_N \tag{3.2.11}$$

Lemma 4.2.1. *Les relations suivantes sont satisfaites:*

$$(B^* p_N - B^* q_N, \bar{u}_N - \bar{u})_U \geq 0 \tag{3.2.12}$$

$$(z_N - z, \bar{u}_N - \bar{u})_U = 0 \tag{3.2.13}$$

avec

$$z = -(B^*p + \bar{u}) \tag{3.2.14}$$

et

$$z_N = -\left(B^*p_N + \bar{u}_N\right) \tag{3.2.15}$$

Theorem 4.2.1. *Soit $(\bar{u}, \bar{y})$ la solution optimale du problème (P) et $(\bar{u}_N, \bar{y}_N)$ la solution optimale du problème (P_N). Alors on a:*

$$\|\bar{u} - \bar{u}_N\|_U \leq \|B^*p - B^*q_N\|_U \tag{3.2.16}$$

Proof. Des équations (3.2.14) et (3.2.15) on a:

$$B^*p - B^*q_N = (B^*p_N - B^*q_N) + (\bar{u}_N - \bar{u}) + (z_N - z),$$

ainsi on obtient:

$$(B^*p - B^*q_N, \bar{u}_N - \bar{u})_U = (B^*p_N - B^*q_N, \bar{u}_N - \bar{u})_U + \|\bar{u}_N - u\|_U^2 + (z_N - z, \bar{u}_N - \bar{u})_U,$$

en utilisant les deux relations du lemme précédent on trouve:

$$(B^*p - B^*q_N, \bar{u}_N - \bar{u})_U \geq \|\bar{u}_N - \bar{u}\|_U^2\,,$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwartz nous permet de conclure l'estimation cherchée.

□

On va à présent introduire des hypothèses qui nous seront utiles dans ce qui suit. On commence par introduire l'équation variationnelle :

$$a(y, v) = (\varphi, v), \text{ pour tout } v \text{ dans } V \tag{EV}$$

Et sa disretisation de Galerkin suivante:

$$a(y_N, v_N) = (\varphi, v_N), \text{ pour tout } v_N \text{ dans } V_N \tag{EV$_N$}$$

HYPOTHESE 1:

Soit y la solution de (EV) et y_N la solution de (EV$_N$) alors on a l'estimation :

$$\|y - y_N\|_H \leq cN^{-m} \tag{3.2.17}$$

où $m \geq 1$ est un entier et $c > 0$ une constante qui ne dépend pas de N.

HYPOTHESE 2:
Soit y_d dans V alors on a:

$$\|y_d - \pi_N y_d\|_H \leq cN^{-m} \tag{3.2.18}$$

où $m \geq 2$ est un entier et $c > 0$ une constante qui ne dépend pas de N.
Ainsi on a :

Theorem 4.2.2. *Soit $\bar{u}$ le contrôle optimal du problème (P) et $\bar{u}_N$ le contrôle optimal de de (P_N). On suppose que les deux hypothèses précedentes sont satisfaites. Alors on a:*

$$\|\bar{u} - \bar{u}_N\|_U = O(N^{-m}) \tag{3.2.19}$$

Proof. Tout d'abord on applique l'hypothèse 1 à (3.2.1) et (3.2.9) en prenant $\varphi = B\bar{u}$ et on obtient:

$$\|\bar{y} - r_N\|_H \leq cN^{-m} \tag{3.2.20}$$

où $\bar{y}$ est l'état optimal du problème (P). De la même manière, en appliquant l'hypothèse 1 pour (3.2.3) et (3.2.10), on obtient:

$$\|p - q_N\|_H \leq cN^{-m} \tag{3.2.21}$$

après des calculs simples et d'après (3.2.10) et (3.2.11), on aboutit à:

$$\|s_N - q_N\|_H \leq \alpha^{-1} \left(\|\bar{y} - r_N\|_H + \|y_d - \pi_N y_d\|_H\right) \tag{3.2.22}$$

En appliquant l'hypothèse 2, on obtient:

$$\|y_d - \pi_N y_d\|_H \leq cN^{-m} \tag{3.2.23}$$

On introduit (3.2.20) et (3.2.23) dans (3.2.22), il vient:

$$\|s_N - q_N\|_H \leq cN^{-m} \tag{3.2.24}$$

comme

$$\|p - q_N\|_H \leq \|p - s_N\|_H + \|s_N - q_N\|_H,$$

et en utilisant (3.2.24) et (3.2.21), on obtient:

$$\|p - q_N\|_H \leq cN^{-m},$$

ainsi:

$$\|B^*p - B^*q_N\|_U \leq cN^{-m}.$$

On conclue en utilisant la relation (3.2.16) du théorème précédent. □

Pour la suite, on introduit l'hypothèse suivante:

HYPOTHESE 3:
Pour l'état optimal $\bar{y}$ on a l'estimation suivante:

$$\|\bar{y} - \pi_N \bar{y}\|_V \leq cN^{1-m} \tag{3.2.25}$$

où $m \geq 2$ est un entier et $c > 0$ une constante qui ne dépend pas de N.
On va maintenant établir une estimation pour l'état.

Theorem 4.2.3. *Soit $\bar{y}$ l'état optimal du problème (P) et $\bar{y}_N$ l'état optimal du problème (P_N). On suppose que les hypothèses 1, 2 et 3 sont satisfaites. Alors les états optimaux $\bar{y}$ et $\bar{y}_N$ satisfont:*

$$\|\bar{y} - r_N\|_H = O(N^{-m}) \tag{3.2.26}$$

où r_N est la solution de l'équation (3.2.9), et on a:

$$\|\bar{y} - \bar{y}_N\|_V = O(N^{1-m}) \tag{3.2.27}$$

Proof. l'équation (3.2.26) est exactement l'équation (3.2.20), c'est pour celà que nous n'allons aborder que la preuve de la relation (3.2.27).

Soit v_N dans V_N, en utilisant (3.2.5) et la coercivité de la forme bilinéaire $a(.,.)$, on obtient:

$$\alpha \|y_N - v_N\|_V^2 \leq (Bu_N^*, \bar{y}_N - v_N) - a(v_N, \bar{y}_N - v_N) \tag{3.2.28}$$

de (3.2.1), on obtient aussi:

$$-a(v_N, \bar{y}_N - v_N) = a(\bar{y} - v_N, \bar{y}_N - v_N) - (B\bar{u}, \bar{y}_N - v_N)$$

qui a été donnée par l'équation (3.2.28) et en utilisant la continuité de $a(.,.)$ et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient:

$$\|\bar{y}_N - v_N\|_V \leq M\alpha^{-1} \|\bar{y} - v_N\|_V + \alpha^{-1} \|B\| \|\bar{u} - \bar{u}_N\|_U \tag{3.2.29}$$

on introduit (3.2.29) dans:

$$\|\bar{y} - \bar{y}_N\|_V \leq \|\bar{y} - v_N\|_V + \|\bar{y}_N - v_N\|_V ,$$

Finallement, on obtient:

$$\|\bar{y}-\bar{y}_N\|_V \leq c\left(\|\bar{y}-v_N\|_V + \|\bar{u}-\bar{u}_N\|_U\right), \text{ pour tout } v_N \text{ dans } V_N, \quad (3.2.30)$$

où $c > 0$ est une constante indépendante de $N, \bar{u}$ et $\bar{y}$.

L'inégalité (3.2.30) correspond au lemme de Céa pour les équations (3.2.1) et (3.2.5).

On prend $v_N = \pi_N \bar{y}$ et on assume que l'hypothèse 3 est satisfaite. Alors:

$$\|\bar{y}-\pi_N\bar{y}\|_V = O(N^{1-m}),$$

et ainsi on obtient le résultat désiré. □

Theorem 4.2.4. *Soit $(\bar{u},\bar{y})$ la solution optimale du problème (P) et $(\bar{u}_N,\bar{y}_N)$ la solution optimale du problème (P_N). On assume que les hypothèses 1,2 et 3 sont satisfaites. Alors on a:*

$$|J(\bar{y},\bar{u}) - J_N(\bar{y}_N,\bar{u}_N)| = O(N^{1-m})$$

Proof. D'après la définition de la fonctionnelle coût on a:

$$|J(\bar{y},\bar{u}) - J_N(\bar{y}_N,\bar{u}_N)| \leq \frac{1}{2}\left|\|\bar{y}-y_d\|_H^2 - \|\bar{y}_N-\pi_N y_d\|_H^2\right| + \frac{1}{2}\left|\|\bar{u}\|_U^2 - \|\bar{u}_N\|_U^2\right| \quad (3.2.31)$$

par suite:

$$\left|\|\bar{y}-y_d\|_H^2 - \|\bar{y}_N-\pi_N y_d\|_H^2\right| \leq (\|\bar{y}\|_H + \|y_d\|_H + \|\bar{y}_N\|_H + \|\pi_N y_d\|_H),$$

et

$$\begin{aligned} \left|\|\bar{y}-y_d\|_H - \|\bar{y}_N-\pi_N y_d\|_H\right| &\leq c\,\|(\bar{y}-y_d)-(\bar{y}_N-\pi_N y_d)\|_H \\ &\leq c(\|(\bar{y}-\bar{y}_N)\|_H - \|(y_d-\pi_N y_d)\|_H) \\ &\leq c(\|(\bar{y}-\bar{y}_N)\|_V - \|(y_d-\pi_N y_d)\|_H). \end{aligned}$$

En utilisant (3.2.27) du théorème précedant ainsi que l'hypothèse 2, on trouve:

$$\left|\|\bar{y}-y_d\|_H^2 - \|\bar{y}_N-\pi_N y_d\|_H^2\right| = O\left(N^{1-m}\right) \quad (3.2.32)$$

et

$$\left|\|\bar{u}\|_U^2 - \|\bar{u}_N\|_U^2\right| = (\|\bar{u}\|_U + \|\bar{u}_N\|_U)\left|\|\bar{u}\|_U - \|\bar{u}_N\|_U\right| \leq c\,\|\bar{u}-\bar{u}_N\|_U$$

et de (3.2.19), on obtient:

$$\left|\|\bar{u}\|_U^2 - \|\bar{u}_N\|_U^2\right| = O(N^{-m}).$$

Finallement on conclue en introduisant les relations (3.2.32) et (3.2.33) dans l'équation (3.2.31) . □

Chapter 5

Erreurs a posteriori de la discrétisation d'un problème de contrôle optimal

L'objectif de cette partie est d'estimer l'erreur entre la solution exacte d'un problème et son approximation par la méthode des éléments finis et une méthode spectrale, uniquement en fonction de quantités connues, c'est-à-dire de la solution approchée, des données du problème posé et du paramètre d'approximation. De telles estimations sont appelées estimations d'erreur a posteriori et se distinguent des estimations d'erreur a priori présentées précédement par le fait que ces dernières font intervenir la solution exacte (qui n'est pas en général connues) où l'estimateur d'erreur a posteriori présenté dans cette partie est l'estimateur par résidu.

5.1 Estimation d'erreur a posteriori

Les estimations d'erreur a posteriori ont été introduites en 1978 par Babuška et Rheinbolt, depuis, l'intérêt pour de telles estimations s'est considérablement accru. Cet intérêt est principalement dû à la nécessité d'obtenir des résultats numériques précis sans que le coût de calcul soit trop élevé. En effet, l'analyse d'erreur à posteriori permet de déterminer explicitement si la solution approchée est une approximation de la solution exacte u suffisament précise pour les besoins de l'ingénieur.

En notant $e(u_\sigma)$ et $\eta(u_\sigma)$, respectivement l'erreur exacte et l'estimateur a posteriori de cette erreur, on souhaite obtenir des inégalités du type:

$$C_1 e(u_\sigma) \leq \eta(u_\sigma) \leq C_2 e(u_\sigma),$$

où C_1 et C_2 sont des constantes données. Ces inégalités signifient que l'erreur est globalement équivalente à l'estimateur d'erreur a posteriori.

Il est bien connu qu'en général sauf dans des cas particuliers l'erreur $e(u_\sigma)$ est rarement connue explicitement tandis que les estimateurs d'erreur peuvent être évalués expérimentalement et même théoriquement ce qui fournit une évaluation de l'erreur $e(u_\sigma)$.

5.1.1 Les estimateurs de type résidu

D'après le théorème de Nečas on a:

$$\begin{aligned} c\,\|u-u_\sigma\| &\leq \sup_{v\in V}\frac{a(u-u_\sigma,v)}{\|v\|_V} \\ &\leq \sup_{v\in V}\frac{\langle A(u-u_\sigma),v\rangle}{\|v\|_V} \\ &\leq \|f-Au_\sigma\|_{V'}, \end{aligned}$$

et ainsi on aurait obtenue une première estimation à postériori de l'erreur sauf que cette estimation fait intervenir la norme $\|.\|_{V'}$ qui est difficile à mettre en oeuvre, pour celà on va faire en sorte de se débarasser de cette dernière de la manière suivante:

On a $a(u-u_\sigma, v_\sigma) = 0$, alors on peut écrire:

$$\|u-u_\sigma\|_V \leq \frac{1}{c}\sup_{v\in V}\frac{a(u-u_\sigma,v-v_\sigma)}{\|v\|_V},\ \text{pour tout } v_\sigma \text{ dans } V_\sigma.$$

On peut développer le numérateur dans le second membre comme suit:

$$\begin{aligned} a(u-u_\sigma,v-v_\sigma) &= a(u-u_\sigma,v) \\ &= \int_\Omega f(v-v_\sigma)dx - a(u_\sigma,v-v_\sigma) \\ &= \int_\Omega f(v-v_\sigma)dx - \int_\Omega Au_\sigma(v-u_\sigma)dx \\ &= \int_\Omega (f-Au_\sigma)(v-v_\sigma)dx, \end{aligned}$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il vient:

$$a(u - u_\sigma, v - v_\sigma) \leq \|f - Au_\sigma\|_V \|v - v_\sigma\|_V ,$$

Enfin on obtient:

$$\begin{aligned} c\|u - u_\sigma\|_V &\leq \frac{\|f - Au_\sigma\|_V \|v - v_\sigma\|_V}{\|v\|_V} \\ &\leq \frac{\|f - Au_\sigma\|_V \|v - \pi_\sigma v\|_V}{\|v\|_V}, \end{aligned}$$

et comme on sait que:

$$\|v - \pi_\sigma v\|_V \leq c\sigma^\alpha \|v\|_V ,$$

on obtient:

$$\|u - u_\sigma\|_V \leq c\sigma^\alpha \|f - Au_\sigma\|_V .$$

5.2 Erreurs de discrétisation par la méthode des éléments finis

Le but de cette partie est de mettre en évidence la nécessite de la méthode des éléments finis adaptative pour les problèmes de contrôle optimal. On va construire une approximation par la méthode des éléments finis d'un problème de contrôle optimal modèle où g et h sont des fonctions quadratiques et d'en tirer des estimations des erreurs a posteriori.

On s'intéresse au problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} \min\limits_{u \in U_{ad}} \{g(y) + h(u)\} , \\ -\Delta y = f + Bu \text{ sur } \Omega, \ y = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où g et h sont des fonctions convexes, U_{ad} est un ensemble convexe fermé et f est assez régulière.

5.2.1 Position du problème de contrôle optimal

Soient Ω et Ω^U deux ensembles ouverts bornés dans $\mathbb{R}^n (n \leq 3)$ à frontière lipchitzienne $\partial\Omega$ et $\partial\Omega^U$.

Afin de bien fixer les idées on note dans la suite: l'espace de l'état $V = H_0^1(\Omega)$, et l'espace du contrôle $U = L^2(\Omega^U)$, et $H = L^2(\Omega)$.

Soit le problème suivant:

$$\begin{cases} \min\limits_{u \,\in\, U_{ad} \,\subset\, U} \left\{ \frac{1}{2} \|y - y_d\|_H^2 + \frac{1}{2} \|u\|_U^2 \right\}, \\ -\Delta y = f + Bu \text{ sur } \Omega, \;\; y = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où f est dans $L = L^2(\Omega)$, U_{ad} est un ensemble convexe fermé donné dans U, B est un opérateur linéaire continu de U dans L inclus dans V' (l'espace dual de V).

Afin d'aborder l'approximation par les éléments finis du problème de contrôle optimal, on a besoin de la formulation variationnelle de l'équation d'état.

$$\begin{cases} a(y, v) = \int_\Omega \nabla y \; \nabla v \; d\Omega, \text{ pour tout } y \text{ et } v \text{ dans } V, \\ (f + Bu, v) = \int_\Omega (f + Bu) v \; d\Omega, \;\text{ pour tout } (u, \, v) \text{ dans } U \times V. \end{cases}$$

Par suite la formulation variationnelle de l'équation d'état est sous la forme:

$$\begin{cases} \text{Trouver } y(u) \text{ dans } V \text{ tel que :} \\ a(y(u), v) = (f + Bu, v), \;\text{ pour tout } v \text{ dans } H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

Alors, le problème de contrôle optimal modèle peut être réecrit sous la forme :

$$\begin{cases} \min\limits_{u \,\in\, U_{ad} \,\subset\, L^2(\Omega^U)} \left\{ \frac{1}{2} \|y - y_d\|_H^2 + \frac{1}{2} \|u\|_U^2 \right\}, \\ a(y(u), v) = (f + Bu, v), \;\text{ pour tout } v \text{ dans } V = H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{4.2.1}$$

Soit α et M deux constantes positives indépendantes de h; tels que pour tout y et v dans V, on a:

$$a(y, y) \geq \alpha \|y\|_V^2,$$

et

$$|a(y, v)| \leq M \|y\|_V \|v\|_V.$$

Il est bien connu que le problème de contrôle (4.2.1) admet une unique solution $(\bar{y}, \bar{u})$ et que la paire $(\bar{y}, \bar{u})$ est la solution de (4.2.1) si et seulement si : il existe un état adjoint $\bar{p}$ dans V tel que le triplet $(\bar{y}, \bar{p}, \bar{u})$ satisfait les conditions d'optimalité :

$$a(\bar{y}, v) = (f + B\bar{u}, v), \;\text{ pour tout } v \text{ dans } V = H_0^1(\Omega), \tag{4.2.2}$$

$$a(q,\bar{p}) = (\bar{y} - y_d, q), \text{ pour tout } q \text{ dans } V = H_0^1(\Omega), \tag{4.2.3}$$

$$(\bar{u} + B^*\bar{p}, w - \bar{u})_U \geq 0, \text{ pour tout } w \text{ dans } U_{ad} \text{ inclus dans } U = L^2\left(\Omega^U\right). \tag{4.2.4}$$

Où B^* est l'opérateur adjoint de B, et $(.,.)_U$ est le produit scalaire de U. Dans ce qui suit on notera simplement le produit par $(.,.)$.

5.2.2 Discrétisation du problème de contrôle optimal

Considérons l'approximation d'un problème de contrôle optimal (4.2.1) par la méthode des éléments finis.

Approximation de l'espace d'état

Soit Ω_h l'approximation de Ω à frontière $\partial\Omega_h$. Soit T_h une partition de Ω_h en n-simplexes K réguliers, ouverts et disjoints, tel que

$$\bar{\Omega}_h = \bigcup_{K \in T_h} \bar{K},$$

et chaque élément admet au plus une face en $\partial\Omega_h$, où $\bar{K}$ et $\bar{K}'$ ont un seul sommet commun ou un bord entier, ou une face entière si K et K' sont dans T_h .

Où

$$P_i \text{ dans } \partial\Omega_h \Rightarrow P_i \text{ dans } \partial\Omega,$$

tel que $\{P_i\}$ pour $i = 1, \ldots, j$ est l'ensemble des sommets associés à T_h.

On considère un autre sous-espace de dimension finie S_h de $C^0(\bar{\Omega}_h)$ associé à T_h , tel que $\chi_{/K}$ sont des polynômes d'ordre ρ; $(\rho \geq 1)$ pour tout χ dans S_h et K dans T_h. Pour faciliter les choses on suppose que $\Omega_h = \Omega$.

Soit

$$V_h = \{\chi \text{ dans } S_h : \chi(P_i) = 0, \text{ pour tout } \ P_i \text{ dans } \ \partial\Omega\}.$$

avec V_h inclus dans V.

Soit

$$\pi_h \text{ de } C^0(\bar{\Omega}_h) \text{ dans } S_h,$$

l'opérateur d'interpolation tel que:

$$\text{pour tout } v \text{ dans } C^0(\bar{\Omega}_h) \text{ on a: } \pi_h v(P_i) = v(P_i), \text{ pour } i = 1, \ldots, j.$$

Approximation de l'espace de contrôle

Soit Ω_h^U l'approximation de Ω^U à frontière $\partial\Omega_h^U$. Soit T_h^Uune partition de Ω_h^U en n-simplexes K^U réguliers, ouverts et disjoints, tel que :

$$\bar{\Omega}_h^U = \bigcup_{K^U \in T_h^U} \bar{K}^U,$$

En outre chaque élément admet au plus une face sur $\partial\Omega_h^U$, où $\bar{K}^U$ et $(\bar{K}^U)'$ ont également un seul sommet commun ou un bord entier ou une face entière si K^U et $(K^U)'$ sont dans T_h^U .

Où

$$P_i^U \text{ dans } \partial\Omega_h^U \Rightarrow P_i^U \text{ dans } \partial\Omega_h^U,$$

tel que $\{P_i^U\}$ pour $i = 1, \ldots, j'$ est l'ensemble des sommets associés à T_h^U.

On considère un autre sous espace de dimension finie W_h^U de $L^2(\Omega_h^U)$ associé à T_h^U, tels que $\chi_{/K^U}$ sont des polynômes d'ordre ρ, $(\rho \geq 0)$ pour tout χ dans W_h^U et K^U dans T_h^U. Afin de simplifier les choses, on suppose que $\Omega_h^U = \Omega^U$.

Soit $U_h = W_h^U$, avec U_h inclus dans U. Notant par h_K respectivement (h_K^U) le diamètre maximum de l'éléments K respectivement (K^U) dans T_h respectivement (T_h^U).

Approximation du problème de contrôle optimal

Une approximation de (4.2.1) par la méthode des éléments finis peut être donnée comme suit :

$$\begin{cases} \min\limits_{u_h \in U_{ad}^h \subset L^2(\Omega^U)} \left\{ \frac{1}{2} \|y_h - y_d\|_H^2 + \frac{1}{2} \|u_h\|_U^2 \right\}, \\ a(y_h(u_h), v_h) = (f + Bu_h, v_h), \text{ pour tout } v_h \text{ dans } V_h. \end{cases} \tag{4.2.5}$$

où U_{ad}^h est un ensemble convexe fermé dans U_h.

On conclue alors que le problème de contrôle optimal (4.2.5) admet une unique solution $(\bar{y}_h, \bar{u}_h)$ et que la paire $(\bar{y}_h, \bar{u}_h)$ dans $V_h \times U_h$, est la solution de(4.2.5) si et seulement s'il existe un état adjoint $\bar{p}_h$ dans V_h ; tel que le triplet $(\bar{y}_h, \bar{p}_h, \bar{u}_h)$ satisfait les conditions d'optimalités :

$$a(\bar{y}_h, v_h) = (f + B\bar{u}_h, v_h), \text{ pour tout } v_h \text{ dans } V_h \text{ inclus dans } V = H_0^1(\Omega), \tag{4.2.6}$$

$$a(q_h, \bar{p}_h) = (\bar{y}_h - y_d, q_h), \text{ pour tout } q_h \text{ dans } V_h \text{ inclus dans } V = H_0^1(\Omega), \tag{4.2.7}$$

$$(\bar{u}_h + B^*\bar{p}_h, w_h - \bar{u}_h) \geq 0, \text{ pour tout } w_h \text{ dans } U_{ad}^h \text{ inclus dans } U = L^2\left(\Omega^U\right), \tag{4.2.8}$$

où B^*est l'opérateur adjoint de B.

Soit u_h dans U_h et $y(u_h)$ la solution de l'équation suivante :

$$a(y(u_h), v) = (f + Bu_h, v), \text{ pour tout } v \text{ dans } V. \tag{4.2.9}$$

Soit $\bar{u}$ et $\bar{u}_h$ les solutions de (4.2.1) et (4.2.5) respectivement. Dans cette approche, les estimations sur $y(\bar{u}_h) - \bar{y}_h$ (au lieu de $\bar{y} - \bar{y}_h$) sont utilisées pour la construction des indicateurs d'erreur a posteriori. Afin d'analyser cette approche; on note d'abord l'équation de projection suivante : pour tout u_h dans U_h

$$a(y(u_h), v_h) - a(y_h(u_h), v_h) = 0, \text{ pour tout } v_h \text{ dans } V_h. \tag{4.2.10}$$

5.2.3 Estimations des erreurs a posteriori

Dans cette partie on va donner des estimations des erreurs a posteriori; le premier théorème donne une estimation sur l'état pour un problème de contrôle optimal avec une contrainte sur le contrôle tandis que pour le deuxième théorème on se place dans le cadre d'un problème sans contrainte pour donner une estimation sur l'état et l'état adjoint couplés .

Theorem 5.2.1. *Soient $y(u_h)$ et $y_h(u_h)$ les solutions de (4.2.9) et (4.2.5) respectivement. Alors on a l'estimation suivante:*

$$\left\|\nabla\left(y\left(\bar{u}_h\right) - \bar{y}_h\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq M\ \eta^2,$$

où

$$\eta^2 = \sum_K \int_K h_K^2\ \left(f + B\bar{u}_h + \Delta\bar{y}_h\right)^2 dK + \sum_l \int_l h_l\left(\nabla\bar{y}_h \cdot n\right)^2 ds.$$

Proof. Soit u_h dans U_{ad}^h et $E^1 = y(u_h) - y_h(u_h)$. On note un élément particulier de T_h par K. Par la suite, il vient de l'équation de projection définie en (4.2.10), de la formule de Green que:

$$
\begin{aligned}
c\left\|\nabla E^1\right\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq a\left(y(u_h)-y_h(u_h), y(u_h)-y_h(u_h)\right)\\
&= a\left(y(u_h)-y_h(u_h), E^1\right)\\
&= a\left(y(u_h)-y_h(u_h), E^1-E^1_I\right)\\
&= \sum_K \int_K \left(\nabla\left(y(u_h)-y_h(u_h)\right)\nabla\left(E^1-E^1_I\right)\right)\, dK\\
&= -\sum_K \int_K \left(\Delta\left(y(u_h)-y_h(u_h)\right)\right)\left(E^1-E^1_I\right)\, dK\\
&\quad -\sum_K \int_{\partial K} \left(\nabla y_h(u_h)\cdot n\right)\left(E^1-E^1_I\right)\, ds\\
&= \sum_K \int_K \left(f+Bu_h+\Delta y_h(u_h)\right)\left(E^1-E^1_I\right)\, dK\\
&\quad -\sum_l \int_l \left(\nabla y_h(u_h)\cdot n\right)\left(E^1-E^1_I\right)\, ds
\end{aligned}
$$

d'après la continuité de la forme bilinéaire $a(.,.)$ on obtient:

$$
\begin{aligned}
c\left\|\nabla E^1\right\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq M\sum_K \left\|\left(f+Bu_h+\Delta y_h(u_h)\right)\right\|_{L^2(K)}\left\|E^1-E^1_I\right\|_{L^2(K)}\\
&\quad +M\sum_l \left\|\left(\nabla y_h(u_h)\cdot n\right)\right\|_{L^2(l)}\left\|E^1-E^1_I\right\|_{L^2(l)},
\end{aligned}
$$

où l est la face de l'élément K, E^1_I est l'interpolation de E^1 à partir du lemme 1.3; et n est le vecteur normal unité sur l. Soit h_l le diamètre maximum de la face l.

Alors des lemmes 1.3 et 1.4, il suit que :

$$
\begin{aligned}
c\left\|\nabla E^1\right\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq M\sum_K \left\|h_K\left(f+Bu_h+\Delta(y_h(u_h))\right)\right\|_{L^2(K)}\left\|\nabla E^1\right\|_{L^2(K)}\\
&\quad +M\sum_l \left\|h_l^{1/2}\left(\nabla y_h(u_h)\cdot n\right)\right\|_{L^2(l)}\left\|\nabla E^1\right\|_{L^2(K)}
\end{aligned}
$$

et en appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient:

$$\begin{aligned} c\left\|\nabla E^1\right\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq M\sum_K \int_K h_K^2 \ \left(f + Bu_h + \Delta\left(y_h(u_h)\right)\right)^2 dK \\ &\quad + M\sum_l \int_l h_l\left(\nabla y_h(u_h)\cdot n\right)^2 + \frac{c}{2}\left\|\nabla E^1\right\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Soit $u_h = \bar{u}_h$, par conséquent, on a :

$$\left\|\nabla\left(y\left(\bar{u}_h\right) - \bar{y}_h\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq M\ \eta^2,$$

où

$$\eta^2 = \sum_K \int_K h_K^2\ \left(f + B\bar{u}_h + \Delta\bar{y}_h\right)^2 dK + \sum_l \int_l h_l\left(\nabla\bar{y}_h\cdot n\right)^2 ds.$$

□

Remark 5.2.1. *Il est à noter que η est seulement un estimateur pour l'erreur intermédiaire $\left(y\left(\bar{u}_h\right) - \bar{y}_h\right)$ et non pas l'erreur réelle $\left(\bar{y} - \bar{y}_h\right)$; et le plus important c'est qu'elle ne nous apporte pas d'information sur l'erreur de l'approximation du contrôle.*

La technique abordée plus haut peut facilement être adaptée pour donner des estimateurs des erreurs a posteriori pour l'état et le contrôle couplés tant qu'il n'y a pas de contraintes sur le contrôle c'est-à-dire $U_{ad} = U$ (ainsi $U_{ad}^h = U_h$). Cette approche sera développée brièvement plus bas.

Si $U_{ad} = U$ alors il suit qu'à partir des conditions d'optimalité (4.2.2)-(4.2.4) que :

$$\bar{u} = -B^*\bar{p}.$$

En remplaçant la relation précédante dans (4.2.2)-(4.2.4), on obtient un système linéaire en fonction de $\bar{y}$ et $\bar{p}$; c'est pour cela que dans ce cas nous n'avons besoin que de donner des estimations d'erreur a posteriori pour l'approximation de:

$$(\bar{y}, \bar{u}) = (\bar{y}, -B^*\bar{p}).$$

Theorem 5.2.2. *supposons que $L = U$, $B = I$, $U_{ad} = U$ et $U_{ad}^h = U_h$, alors*

$$\left\|\nabla\left(\bar{y} - \bar{y}_h\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\nabla\left(\bar{p} - \bar{p}_h\right)\right\|^2_{L^2(\Omega^U)} \leq M\ \hat{\eta}^2,$$

où

$$
\begin{aligned}
\hat{\eta}^2 &= \sum_K \int_K h_K^2 \ \left(f - \bar{p}_h + \Delta \bar{y}_h\right)^2 dK + \sum_l \int_l h_l \left(\nabla \bar{y}_h \cdot n\right)^2 ds \\
&\quad + \sum_K \int_K h_K^2 \ \left(\bar{y}_h - y_d + \Delta \bar{p}_h\right)^2 dK + \sum_l \int_l h_l \left(\nabla \bar{p}_h \cdot n\right)^2 ds.
\end{aligned}
$$

Proof. En remplaçant $\bar{u} = -\bar{p}$ dans $(4.2.2) - (4.2.4)$, on trouve le système suivant:

$$
\begin{cases}
a(\bar{y}, v) + (\bar{p}, v) = (f, v), \text{ pour tout } v \text{ dans } V. \\
a(q, \bar{p}) - (\bar{y}, q) = -(y_d, q), \text{ pour tout } q \text{ dans } V.
\end{cases}
$$

Ainsi l'approximation par la méthode des éléments finis du système est donnée par:

$$
\begin{cases}
a(\bar{y}_h, v_h) + (\bar{p}_h, v_h) = (f, v_h), \text{ pour tout } v_h \text{ dans } V_h. \\
a(q_h, \bar{p}_h) - (\bar{y}_h, q_h) = -(y_d, q_h), \text{ pour tout } q_h \text{ dans } V_h.
\end{cases}
$$

Dans ce cas l'équation de projection donne:

$$
\begin{cases}
a(\bar{y} - \bar{y}_h, v_h) + (\bar{p} - \bar{p}_h, v_h) = 0, \text{ pour tout } v_h \text{ dans } V_h \\
a(q - q_h, \bar{p}_h) - (\bar{y} - \bar{y}_h, q_h) = 0, \text{ pour tout } q_h \text{ dans } V_h
\end{cases}
\tag{4.2.11}
$$

Soit $E^{\ y} = \bar{y} - \bar{y}_h$ et $E^{\ p} = \bar{p} - \bar{p}_h$. Par la coercivité de la forme bilinèaire $a(.,.)$, on obtient:

$$
c(\|\nabla E^{\ y}\|_H^2 + \|\nabla E^{\ p}\|_U^2) \leq a(\bar{y} - \bar{y}_h, \bar{y} - \bar{y}_h) + a(\bar{p} - \bar{p}_h, \bar{p} - \bar{p}_h)
$$

En ajoutant et en retranchant la quantité $(p(u) - p_h(u_h), y(u) - y_h(u_h))$, et comme plus haut, en appliquant les équations de projection définient en (4.2.11), la formule de Green, l'inégalité d'Hölder et le lemme 1.3, on trouve

:

$$
\begin{aligned}
c(\|\nabla E^{\,y}\|_H^2 + \|\nabla E^{\,p}\|_U^2) &= a(\bar{y}-\bar{y}_h, E^{\,y}-E^{\,y}_{\,I}) + a(\bar{p}-\bar{p}_h, E^{\,y}-E^{\,y}_{\,I}) \\
&\quad + a(E^{\,p}-E^{\,p}_{\,I}, \bar{p}-\bar{p}_h) - a(\bar{y}-\bar{y}_h, E^{\,p}-E^{\,p}_{\,I}) \\
&= \sum_K \int_K (-\Delta\ \bar{y} + (\bar{p}-\bar{p}_h) + \Delta\ \bar{y}_h)(E^{\,y}-E_I^y)\ dK \\
&\quad - \sum_K \int_{\partial K} (\nabla \bar{y}_h \cdot n)\,(E^{\,y}-E_I^y)\ ds \\
&\quad + \sum_K \int_K (-\Delta\ \bar{p} - (\bar{y}-\bar{y}_h) + \Delta\ \bar{p}_h\ )(E^{\,p}-E_I^p)\ dK \\
&\quad - \sum_K \int_{\partial K} (\nabla\ \bar{p}_h \cdot n)(E^{\,p}-E_I^p)\ ds \\
&\leq M\ (\sum_K \int_K h_K^2\ (f-\bar{p}_h+\Delta\ \bar{y}_h)^2\ dK + \sum_l \int_l h_l\ \ (\nabla \bar{y}_h \cdot n)^2\ \ ds \\
&\quad + \sum_K \int_K h_K^2\ (\bar{y}_h - y_d + \Delta\ \bar{p}_h\ )^2\ dK + \sum_l \int_l h_l\ (\nabla\ \bar{p}_h\ \ \cdot n)^2\ ds) \\
&\quad + \frac{c}{2}\ (\|\nabla E^{\,y}\|_H^2 + \|\nabla E^{\,p}\|_U^2),
\end{aligned}
$$

Où E_I^y et $E^{\,p}_{\,I}$ sont les interpolations de $E^{\,y}$ et $E^{\,p}$ respectivement. Par conséquent, on obtient l'estimation cherchée. □

5.3 Erreurs de discrétisation par la méthode spectrale

5.3.1 Position du problème de contrôle optimal

Soit $V = H_0^1(\Omega)$ et $U = L^2(\Omega)$.

On s'intéresse au problème suivant:

$$
\begin{cases}
\min\limits_{u\,\in\,U_{ad}} \left\{ \frac{1}{2}\,\|(y-y_d)\|^2 + \frac{1}{2}\,\|u\|^2 \right\}, \\
-\Delta y = f + u \text{ sur } \Omega,\ \ y = 0 \text{ sur } \partial\Omega,
\end{cases}
$$

où U_{ad} est l'ensemble défini par:

$$U_{ad} = \left\{ v \text{ dans } L^2(\Omega) : \int_\Omega v \geq 0 \right\}.$$

Afin de considérer l'approximation par la méthode spectrale, on a besoin de la formulation variationnelle de l'équation d'état où:

$$\begin{cases} a(y,v) = \int_\Omega \nabla y \; \nabla v \; d\Omega, \text{ pour tout } y \text{ et } v \text{ dans } V \\ (u,w)_U = \int_\Omega u \; w \; d\Omega, \text{ pour tout } u \text{ et } w \text{ dans } U \end{cases}$$

On écrit généralement:

$$\begin{cases} \text{Trouver } y(u) \text{ dans } V \text{ tel que :} \\ a(y(u),v) = (f+u,v), \text{ pour tout } v \text{ dans } V \end{cases}$$

où $(.,.)$ est le produit scalaire de $L^2(\Omega)$. Dans ce cas le poblème de contrôle optimal s'écrit comme suit:

$$\min_{u \,\in\, U_{ad}} \left\{ \frac{1}{2} \left\| (y - y_d) \right\|_H^2 + \frac{1}{2} \left\| u \right\|_U^2 \right\}, \tag{4.3.1}$$

avec

$$a(y(u),v) = (f+u,v), \text{ pour tout } v \text{ dans } V. \tag{4.3.2}$$

On introduit l'état adjoint $\bar{p}$ dans V tels que le triplet $(\bar{y}, \bar{p}, \bar{u})$ satisfait les conditions d'optimalité suivantes:

$$a(\bar{y},v) = (f+\bar{u},v), \text{ pour tout } v \text{ dans } V, \tag{4.3.3}$$

$$a(q,\bar{p}) = (\bar{y} - y_d, q), \text{ pour tout } q \text{ dans } V, \tag{4.3.4}$$

$$(\bar{u}+\bar{p}, w-\bar{u})_U \geq 0, \text{ pour tout } w \text{ dans } U_{ad} \text{ et } U_{ad} \text{ inclu dans } U. \tag{4.3.5}$$

5.3.2 Discrétisation du problème de contrôle optimal

Dans cette partie on prend $\Omega = [-1,1]^d$.

On considère l'ensemble:

$$X_N^i = span\left\{ L_0(x_i), L_1(x_i), ..., L_N(x_i) \right\}$$

On introduit les espaces de dimension finie $V_N = X_N \cap V$, $U_N = X_N \cap U$ et $K_N = X_N \cap U_{ad}$; alors l'approximation du problème de contrôle optimal s'écrit comme suit:

$$\min_{u_N \in U_{ad}^N \subset U_N} \left\{ \frac{1}{2} \left\| (y_N - y_d) \right\|_H^2 + \frac{1}{2} \left\| u_N \right\|_U^2 \right\}, \tag{4.3.6}$$

avec

$$a(y_N, v) = (f + u_N, v_N), \text{ pour tout } v_N \in V_N \ \subset H_0^1(\Omega). \tag{4.3.7}$$

On introduit l'état adjoint $\bar{p}_N$ dans V_N tels que le triplet $(\bar{y}_N, \bar{p}_N, \bar{u}_N)$ satisfait les conditions d'optimalité suivantes:

$$a(\bar{y}_N, v_N) = (f + \bar{u}_N, v_N), \text{ pour tout } v_N \text{ dans } V_N, \tag{4.3.8}$$

$$a(q_N, \bar{p}_N) = (\bar{y}_N - y_d, q_N), \text{ pour tout } q_N \text{ dans } V_N, \tag{4.3.9}$$

$$(\bar{u}_N + \bar{p}_N, w_N - \bar{u}_N)_U \geq 0, \text{ pour tout } w_N \text{ dans } U_{ad}^N. \tag{4.3.10}$$

On note par:

$$J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \left\| (y - y_d) \right\|^2 + \frac{1}{2} \left\| u \right\|^2 \right\},$$

et

$$J_N(u_N) = \left\{ \frac{1}{2} \left\| (y_N - y_d) \right\|^2 + \frac{1}{2} \left\| u_N \right\|^2 \right\}.$$

$J(u)$ satisfait pour $c > 0$ indépendante de N la relation suivante:

$$(J'(\bar{u}) - J'(\bar{u}_N), \bar{u} - \bar{u}_N)_U \geq c \left\| \bar{u} - \bar{u}_N \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \tag{4.3.11}$$

Theorem 5.3.1. *Soit $(\bar{y}_N, \bar{p}_N, \bar{u}_N)$ la solution des conditions d'optimalités discrètes. Alors on a:*

$$\bar{u}_N = \max\{0, \bar{p}_N\} - \bar{p}_N.$$

On pose par hypothèse:

$$(J'(\bar{u}), w)_U = (\bar{u} + \bar{p}, w)_U, \tag{4.3.12}$$

$$(J'_N(\bar{u}_N), w)_U = (\bar{u}_N + \bar{p}_N, w)_U, \tag{4.3.13}$$

$$(J'(\bar{u}_N), w)_U = (\bar{u}_N + p(\bar{u}_N), w)_U. \tag{4.3.14}$$

On donne $y(\bar{u}_N)$ et $p(\bar{u}_N)$ comme étant respectivement les solutions des deux équations auxilliaires suivantes :

$$a(y(\bar{u}_N), v) = (f + \bar{u}_N, v), \text{ pour tout } v \text{ dans } V = H_0^1(\Omega), \tag{4.3.15}$$

$$a(q, p(\bar{u}_N)) = (y(\bar{u}_N) - y_d, q), \text{ pour tout } q \text{ dans } V = H_0^1(\Omega). \tag{4.3.16}$$

5.3.3 Estimations des erreurs a posteriori

Dans cette partie on va donner des estimations des erreurs a posteriori pour l'approximation du problème de contrôle optimal par la méthode spectrale.

On suppose que f et y_d sont dans $L^2(\Omega)$.

Lemma 5.3.1. *Soit $y(\bar{u}_N)$ et $\bar{y}_N$ la solution de (4.3.15) et (4.3.8) respectivement. Alors on a:*

$$a(\bar{y}_N - y(\bar{u}_N), v_N) = 0, \text{ pour tout } v_N \text{ dans } V_N$$

Proof. voir référence [6]. □

Lemma 5.3.2. *Soit $y(\bar{u}_N)$, $p(\bar{u}_N)$, $\bar{y}_N$ et $\bar{p}_N$ les solutions de (4.3.15), (4.3.16),(4.3.8) et (4.3.9) respectivement. Alors on a les deux relations suivantes:*

$$\|y(\bar{u}_N) - \bar{y}\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|\bar{u}_N - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}$$

et

$$\|\bar{p}(u_N) - \bar{p}\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|y(\bar{u}_N) - \bar{y}\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\bar{u}_N - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}$$

Proof. voir référence [6]. □

Dans le lemme suivant on va donner des estimations des erreurs a posteriori pour les variables intermédiaires.

Lemma 5.3.3. *Soit $y(\bar{u}_N)$, $p(\bar{u}_N)$, $\bar{y}_N$ et $\bar{p}_N$ les solutions de (4.3.15), (4.3.16),(4.3.8) et (4.3.9) respectivement. Alors on a:*

$$\|y(\bar{u}_N) - \bar{y}_N\|_{H^1(\Omega)} + \|p(\bar{u}_N) - \bar{p}_N\|_{H^1(\Omega)} \leq C\eta \tag{4.3.17}$$

où l'estimateur η est donné par:

$$\eta = N^{-1} \|\bar{y}_N - y_d + \Delta\bar{p}_N\|_{L^2(\Omega)} + N^{-1} \|f + \bar{u}_N + \Delta\bar{y}_N\|_{L^2(\Omega)}.$$

Proof. On note par $e_p = p(\bar{u}_N) - \bar{p}_N$, et soit $e_p^N = \Pi_N^{1,0} e_p$ dans V_N la projection orthogonale de e_p. Alors il s'en suit d'après (4.3.9),(4.3.16) et du théorème 2.2 que:

$$\begin{aligned}
c^{-1} \|p(\bar{u}_N) - \bar{p}_N\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq (\nabla e_p, \nabla e_p) = \left(\nabla\left(e_p - e_p^N\right), \nabla e_p\right) + \left(\nabla e_p^N, \nabla e_p\right) \\
&= \left(y(\bar{u}_N) - y_d + \Delta\bar{p}_N, e_p - e_p^N\right) + \left(y(\bar{u}_N) - \bar{y}_N, e_p^N\right) \\
&= \left(\bar{y}_N - y_d + \Delta\bar{p}_N, e_p - e_p^N\right) + (y(\bar{u}_N) - \bar{y}_N, e_p)
\end{aligned}$$

en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz il vient:

$$\begin{aligned} c^{-1}\left\|p(\bar{u}_N)-\bar{p}_N\right\|^2_{H^1(\Omega)} &\leq \left\|\bar{y}_N-y_d+\Delta\bar{p}_N\right\|_{L^2(\Omega)}\cdot\left\|e_p-e_p^N\right\|_{L^2(\Omega)}+(y(\bar{u}_N)-\bar{y}_N,e_p)\\ &\leq CN^{-1}\left\|\bar{y}_N-y_d+\Delta\bar{p}_N\right\|_{L^2(\Omega)}\cdot\left\|e_p\right\|_{H^1(\Omega)}+\left\|y(\bar{u}_N)-\bar{y}_N\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|e_p\right\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

par l'inégalité de Hölder on obtient:

$$c^{-1}\left\|p(\bar{u}_N)-\bar{p}_N\right\|^2_{H^1(\Omega)}\leq CN^{-2}\left\|\bar{y}_N-y_d+\Delta\bar{p}_N\right\|^2_{L^2(\Omega)}+C\left\|y(\bar{u}_N)-\bar{y}_N\right\|^2_{L^2(\Omega)}+2\delta\left\|e_p\right\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

On prend $\delta=\frac{1}{4c}$, on a:

$$\left\|p(\bar{u}_N)-\bar{p}_N\right\|^2_{H^1(\Omega)}\leq CN^{-2}\left\|\bar{y}_N-y_d+\Delta\bar{p}_N\right\|^2_{L^2(\Omega)}+C\left\|y(\bar{u}_N)-\bar{y}_N\right\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{4.3.18}$$

de manière similaire on note par $e_y=y(\bar{u}_N)-\bar{y}_N$ et soit $e_y^N=\Pi_N^{1,0}e_y$dans V_N qui représente la projection orthogonale de e_p, en utilisant le lemme 3.1, (4.3.8) et (4.3.15) il vient:

$$\begin{aligned} c^{-1}\left\|y(\bar{u}_N)-\bar{y}_N\right\|^2_{H^1(\Omega)} &\leq (\nabla e_y,\nabla e_y)=\left(\nabla\left(e_y,e_y^N\right),\nabla e_y\right)\\ &= \left(f+\bar{u}_N+\Delta\bar{y}_N,e_y-e_y^N\right), \end{aligned}$$

en appliquant l'inégalité de Caucy-Schwartz et l'inégalité de Hölder il vient:

$$c^{-1}\left\|y(\bar{u}_N)-\bar{y}_N\right\|^2_{H^1(\Omega)}\leq CN^{-2}\left\|f+\bar{u}_N+\Delta\bar{y}_N\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\delta\left\|y(\bar{u}_N)-\bar{y}_N\right\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

en choisissant $\delta=\frac{1}{2c}$, on a:

$$\left\|y(\bar{u}_N)-\bar{y}_N\right\|^2_{H^1(\Omega)}\leq CN^{-2}\left\|f+\bar{u}_N+\Delta\bar{y}_N\right\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{4.3.19}$$

en utilisant les lemme 3.1 et 3.2 on obtientl'estimation cherchée. □

Theorem 5.3.2. *soit $(\bar{y},\bar{p},\bar{u})$ et $(\bar{y}_N,\bar{p}_N,\bar{u}_N)$ les solutions de (4.3.3)-(4.3.5) et (4.3.8)-(4.3.10) respectivement alors on a:*

$$\left\|\bar{u}-\bar{u}_N\right\|_{L^2(\Omega)}+\left\|\bar{y}-\bar{y}_N\right\|_{H^1(\Omega)}+\left\|\bar{p}-\bar{p}_N\right\|_{H^1(\Omega)}\leq C\eta \tag{4.3.20}$$

où η est défini dans le lemme 3.3.

Proof. Soit $y(\bar{u}_N)$ et $p(\bar{u}_N)$ les variables intermédiaires définies en (4.3.15) et (4.3.16). On prend $v_N = \pi_N \bar{u}$ dans X_N. Il vient de (4.3.12)-(4.3.14), (4.3.3)-(4.3.5), (4.3.8)-(4.3.10) et du théorème 3.1 que:

$$\begin{aligned}
c\left\|\bar{u}-\bar{u}_N\right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq (J'(\bar{u}), \bar{u}-\bar{u}_N)_U - (J'(\bar{u}_N), \bar{u}-\bar{u}_N)_U \\
&\leq -(J'(\bar{u}_N), \bar{u}-\bar{u}_N)_U \\
&= (J'_N(\bar{u}_N), \bar{u}_N-\bar{u})_U + (J'_N(\bar{u}_N) - J'(\bar{u}_N), \bar{u}-\bar{u}_N)_U \\
&\leq (J'_N(\bar{u}_N), v_N-\bar{u})_U + (J'_N(\bar{u}_N) - J'(\bar{u}_N), \bar{u}-\bar{u}_N)_U \\
&= (J'_N(\bar{u}_N) - J'(\bar{u}_N), \bar{u}-\bar{u}_N)_U \\
&= (\bar{p}_N - p(\bar{u}_N)\,, \bar{u}-\bar{u}_N) \\
&\leq C\left\|p(\bar{u}_N)-\bar{p}_N\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\bar{u}-\bar{u}_N\right\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

ainsi à partir du lemme 3.3 précédent on a:

$$\left\|\bar{u}-\bar{u}_N\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left\|\bar{p}_N-p(\bar{u}_N)\right\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.3.21}$$

On a aussi:

$$\begin{aligned}
\left\|\bar{y}-\bar{y}_N\right\|_{H^1(\Omega)} &\leq \left\|\bar{y}-y(\bar{u}_N)\right\|_{H^1(\Omega)} + \left\|y(\bar{u}_N)-\bar{y}_N\right\|_{H^1(\Omega)} \qquad (5.1)\\
\left\|\bar{p}-\bar{p}_N\right\|_{H^1(\Omega)} &\leq \left\|\bar{p}-p(\bar{u}_N)\right\|_{H^1(\Omega)} + \left\|p(\bar{u}_N)-\bar{p}_N\right\|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

(5.2)

En utilisant (4.3.21), (4.3.22) et les lemmes 3.1, 3.2 et 3.3 on obtient le résultat cherché. □

Afin d'estimer cette quantité $\left\|p(\bar{u}_N)-\bar{p}_N\right\|_{L^2(\Omega)}$ on pose le problème auxilliaire suivant:

$$-\Delta\xi = f,\ x \text{ dans } \Omega \text{ et } \xi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \tag{4.3.23}$$

où l'estimation suivante est vérifiée:

$$\left\|\xi\right\|_{H^2(\Omega)} \leq C\left\|f\right\|_{L^2(\Omega)} \tag{4.3.24}$$

Lemma 5.3.4. *Soit ($y(\bar{u}_N), p(\bar{u}_N)$) et $(\bar{y}_N, \bar{p}_N)$ les solutions de (4.3.15)-(4.3.16) et (4.3.8)-(4.3.9) respectivement alors:*

$$\left\|p(\bar{u}_N)-\bar{p}_N\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|y(\bar{u}_N)-\bar{y}_N\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C\eta_1 \tag{4.3.25}$$

où

$$\eta_1 = N^{-2}\left\|\bar{y}_N - y_0 + \Delta\bar{p}_N\right\|_{L^2(\Omega)} + N^{-2}\left\|f + \bar{u}_N + \Delta\bar{y}_N\right\|_{L^2(\Omega)}$$

Proof. Soit ξ la solution de (4.3.23) avec $f(x) = p(\bar{u}_N) - \bar{p}_N$ et soit $\xi^N = \pi^0_{1,N}\xi$ dans V_N la projection orthogonale de ξ alors à partir de (4.3.9),(4.3.16), et du théorème 2.2 on trouve:

$$\begin{aligned}\|p(\bar{u}_N) - \bar{p}_N\|^2_{L^2(\Omega)} &= (\nabla\xi, \nabla(p(\bar{u}_N) - \bar{p}_N)) \qquad (5.3)\\ &= \left(\nabla(\xi - \xi^N)\right., \nabla(p(\bar{u}_N) - \bar{p}_N)) + \left(\nabla\xi^N, \nabla(p(\bar{u}_N) - \bar{p}_N)\right)\\ &= (y(\bar{u}_N) - y_0) + \Delta\bar{p}_N, \xi - \xi^N) + (y(\bar{u}_N) - \bar{y}_N, \xi^N)\\ &= (\bar{y}_N - y_0 + \Delta\bar{p}_N, \xi - \xi^N) + (y(\bar{u}_N) - \bar{y}_N, \xi)\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz on obtient:

$$\begin{aligned}\|p(\bar{u}_N) - \bar{p}_N\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq C\left(N^{-2}\|\bar{y}_N - y_0 + \Delta\bar{p}_N\|_{L^2(\Omega)} + \|y(\bar{u}_N) - \bar{y}_N\|_{L^2(\Omega)}\right)\|\xi\|_{H^2(\Omega)}\\ &\leq C(N^{-2}\|\bar{y}_N - y_0 + \Delta\bar{p}_N\|_{L^2(\Omega)} + \|y(\bar{u}_N) - \bar{y}_N\|_{L^2(\Omega)})\|f\|_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

alors on a:

$$\|p(\bar{u}_N) - \bar{p}_N\|_{L^2(\Omega)} \leq CN^{-2}\|\bar{y}_N - y_0 + \Delta\bar{p}_N\|_{L^2(\Omega)} + C\|y(\bar{u}_N) - \bar{y}_N\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.3.27}$$

De la même manière soit ξ la solution de (4.3.23) avec $f = y(\bar{u}_N) - \bar{y}_N$ et soit $\xi^N = \pi^0_{1,N}\xi$ dans V_N la projection orthogonale de ξ . Alors a partir de (4.3.9),(4.3.23), et du théorème 2.2 on a:

$$\begin{aligned}\|y(\bar{u}_N) - \bar{y}_N\|^2_{L^2(\Omega)} &= (\nabla\xi, \nabla(y(\bar{u}_N) - \bar{y}_N))\\ &= \nabla\left(\xi - \xi^N\right), \nabla(y(\bar{u}_N) - \bar{y}_N)) + (\nabla\xi^N, \nabla(y(\bar{u}_N) - \bar{y}_N))\\ &= \left(f + \bar{u}_N + \Delta\bar{y}_N, \xi - \xi^N\right)\\ &\leq CN^{-2}\|f + \bar{u}_N + \Delta\bar{y}_N\|_{L^2(\Omega)}\|\xi\|_{H^2(\Omega)}\\ &\leq CN^{-2}\|f + \bar{u}_N + \Delta\bar{y}_N\|_{L^2(\Omega)}\|f\|_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

ainsi

$$\|y(\bar{u}_N) - \bar{y}_N\|_{L^2(\Omega)} \leq CN^{-2}\|f + \bar{u}_N + \Delta\bar{y}_N\|_{L^2(\Omega)} \tag{4.3.28}$$

Alors (4.3.26), (4.3.28) implique (4.3.25). □

Theorem 5.3.3. *Soit $(\bar{y}, \bar{p}, \bar{u})$ et $(\bar{y}_N, \bar{p}_N, \bar{u}_N)$ les solutions de (4.3.3)-(4.3.5) et (4.3.8)-(4.3.10) respectivement alors on a:*

$$\|\bar{u} - \bar{u}_N\|_{L^2(\Omega)} + \|\bar{y} - \bar{y}_N\|_{L^2(\Omega)} + \|\bar{p} - \bar{p}_N\|_{L^2(\Omega)} \leq C\eta_1 \tag{4.3.29}$$

où η_1 est défini dans le lemme 3.2 précédant.

Proof. En utilisant (4.3.21), (4.3.22) et les lemmes 3.1, 3.2 et 3.3 on obtient le résultat cherché. □

Bibliography

[1] Grégoire Allaire, Analyse numérique et optimisation, Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique, Cours de l'Ecole Polytechnique, 2006.

[2] Viorel Arnăutu et Pekka Neittaanmäki, Disctretization estimates for an elliptic control problem, Numer. Funct. Anal. and Optimiz,19(5&6), 431-464, 1998.

[3] Christine Bernardi,Yvon Maday et Francesca Rapetti, Discrétisations variationnelles de problèmes aux limites elliptiques, Springer, Paris 2004.

[4] Brezis Haim, Analyse fonctionnelle, Théorie et applications. Masson 1987.

[5] Alexandre Ern, Jean-Luc Guermond, Eléments finis : Théorie, Applications, Mise en oeuvre, Springer, Berlin, 2002.

[6] Yanping Chen, Nianyu Yi, and Wenbin Liu, A Legendre–Galerkin spectral method for optimal control problems governed by elliptic equations, Siam J. Numer Anal. Vol. 46, No. 5, pp. 2254–2275 2008

[7] Wenbin Liu a and Ningning Yan, A posteriori error estimates for distributed convex optimal control problems, Advances in Computational Mathematics 15: 285–309, 2001.