Chapitre 5

Contrôle optimal à horizon fini

Nous allons étudier dans ce chapitre le cas de problèmes de contrôle optimal “simples”. En effet nous supposerons que **l’équation d’état est une équation différentielle ordinaire (EDO) linéaire et que le coût est une fonctionnelle quadratique**. Ce choix n’est toutefois pas très restrictif car de nombreux problèmes de contrôle optimal sont issus d’une minimisation au sens des moindres carrés et la fonctionnelle qui apparaît alors “naturellement” est quadratique.

5.1 Présentation du problème - Théorèmes d’existence

5.1.1 L’équation d’état

On considère un système défini par l’équation d’état (linéaire suivante) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{dx}{dt} & = & A\,x(t) + B\,v(t) + f(t)\ ,\ \text{sur }]0,T[\ , \\ x(0) & = & x_0\ . \end{array} \right. \tag{5.1.1}$$

- T est un réel positif fixé et $f \in L^2(0,T)^n$. On dit qu’on travaille à **horizon fini**.
- Le contrôle $v : [0,T] \to \mathbb{R}^p$ appartient à un sous-ensemble $\mathcal{U}$, convexe et fermé de l’espace des contrôles : $L^2(0,T)^p$. On peut choisir par exemple

  $$\mathcal{U} = \{\ v \in L^2(0,T)^p \ \mid\ v(s) \in U \ \text{ pour presque tout } s \text{ de } [0,T]\ \} \tag{5.1.2}$$

  où U est un convexe fermé de $\mathbb{R}^p$.
  On munit l’ensemble des contrôles de la norme usuelle de $L^2(0,T)^p$

  $$\|v\|_{\mathcal{U}} = \left[\int_0^T \|v(t)\|_p^2\right]^{\frac{1}{2}}\ .$$

- La fonction d’état $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et la donnée initiale x_0 est dans $\mathbb{R}^n$.

– A est une matrice (réelle) carrée $n \times n$. Pour simplifier on la suppose constante (c'est-à-dire ne dépendant pas de la variable t).
  De la même manière B est une matrice réelle $p \times n$ constante.

Remarque 5.1.1 *Le système précédent est en réalité un système d'équations différentielles. On rappelle que toute équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants peut se ramener à un système différentiel d'ordre 1 de n équations à n inconnues.*
On n'a aucune information sur la valeur finale $x(T)$ et on ne désire pas lui donner de valeur particulière (0 par exemple). On n'a donc pas affaire à un problème de contrôlabilité.

Commençons par rappeler un résultat sur les EDO linéaires.

Proposition 5.1.1 *Le système (5.1.1) a une solution unique $x = x[v]$. De plus l'application $v \mapsto x[v]$ est affine, continue de $L^2(0,T;\mathbb{R}^p)$ dans $L^\infty(0,T;\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration - L'existence et l'unicité de la solution de (5.1.1) découlent des résultats généraux sur les EDO linéaires (voir Annexe A).
Montrons que $v \mapsto x[v]$ est affine. Soit $x^o = x[0]$ la solution de l'équation (5.1.1) correspondant à $v = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{dx^o}{dt} &=& A\,x^o(t) + f(t)\ ,\ \text{sur }]0,T[\ , \\ x^o(0) &=& x_0\ . \end{array} \right.$$

et $x_H[v]$ la solution de l'EDO homogène :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{dx_H}{dt} &=& A\,x_H(t) + B\,v\ ,\ \text{sur }]0,T[\ , \\ x_H(0) &=& 0\ . \end{array} \right.$$

Il est clair que l'application $v \mapsto x_H[v]$ est linéaire. Comme $x[v] = x_H[v] + x^o$, le résultat suit.
Pour montrer la continuité il suffit de montrer la continuité de l'application de $L^2(0,T)^p$ dans $L^2(0,T)^n$ qui à v associe $x_H[v]$. Cette solution peut s'écrire

$$x_H[v](t) = \int_0^t e^{A(t-s)}\ Bv(s)\ ds\ .$$

Comme $|||\, e^{At}\, ||| \le e^{|||\, A\, |||t} \le e^{|||\, A\, |||\, T}$ pour toute norme matricielle $|||\cdot|||$ induite on obtient

$$\|x_H[v](t)\|_n \le e^{|||\, A\, |||\, T} |||\, B\, ||| \int_0^T \|v(s)\|_p\, ds\ ,$$

c'est-à-dire d'une part

$$\|x[v]_H\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} \le \sqrt{T}\, \|x_H[v]\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{R}^n)} \le C\|v\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{R}^p)}\ ,\ \text{si } v \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^p)$$

et d'autre part par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\|x_H[v]\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{R}^n)} \le C\|v\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^p)}\ .$$

□

Remarque 5.1.2 *La proposition précédente montre que $x[v] \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^n)$ lorsqu'on choisit $v \in L^2(0,T;\mathbb{R}^p)$. En fait on peut montrer "mieux", à savoir que $x[v]$ est toujours continu (même si v ne l'est pas).*

Pour alléger les notations on écrira désormais $x(t,v) = x[v](t)$: la quantité x est fonction de la variable t et dépend aussi du paramètre v. On notera

$$\mathcal{X} = \{ \, x \in L^2(0,T)^n \ | \ x(0) = x_0 \, \}$$

l'espace d'état, c'est-à-dire l'espace (affine) auquel appartient la fonction d'état $x[v]$ solution de l'EDO, quand v appartient à $\mathcal{U}$. C'est une espace vectoriel si $x_0 = 0$.
On se donne, à présent une fonction **coût** (ou critère) **quadratique** de la forme suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(x,v) = \quad & \frac{1}{2}\int_0^T \langle x(t) - z_d(t), Q\,(x(t) - z_d(t)) \rangle_n \ dt \\ & + \langle x(T) - z_d(T), D\,(x(T) - z_d(T)) \rangle_n \\ & + \frac{1}{2}\int_0^T \langle v(t), R\,v(t) \rangle_p \ dt \ , \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

où R est une matrice $p \times p$ définie positive, Q et D sont des matrices $n \times n$ semi-définies positives, et symétriques. $\langle \cdot,\cdot \rangle_n$ désigne le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$: $\langle x(t), z(t) \rangle_n = x(t)^t z(t)$. On pose ensuite

$$J(v) = \mathcal{J}(x[v], v) \ . \tag{5.1.4}$$

Remarque 5.1.3 *La fonctionnelle J est définie sur l'ensemble $\mathcal{U} \subset L^2(0,T)^p$. En pratique, v (et donc x) sera une fonction continue et il n'y aura pas de problème pour définir J.*
J est une norme et il est facile de voir que J ainsi définie est continue.
*Les termes "intégraux" de J sont des termes **distribués**, qui agissent sur tout l'intervalle $[0,T]$; le troisième terme est une terme d'observation finale, au temps T.*

5.1.2 Le problème de contrôle optimal

Nous allons considérer le problème d'optimisation suivant

$$(\mathcal{P}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \min \ J(v) = \mathcal{J}(x(v), v) \\ v \in \mathcal{U} \ . \end{array} \right.$$

Le problème $(\mathcal{P})$ comporte une contrainte implicite qui est l'équation d'état. On peut le formuler de manière équivalente en faisant apparaître l'équation d'état comme une contrainte explicite.

$$(\mathcal{P}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \min \ \mathcal{J}(x,v) \\ \\ \dfrac{dx}{dt} = A\,x(t) + B\,v(t) + f(t) \ , \ \text{sur }]0,T[\ , \ x(0) = x_0 \\ v \in \mathcal{U} \ . \end{array} \right.$$

Définition 5.1.1 *Un contrôle u solution du problème de minimisation précédent s'appelle un* ***contrôle optimal*** *pour le critère J (et le point x_0).*

On peut choisir le contrôle u "à l'avance", c'est-à-dire choisir une fonction u qui servira de contrôle sur $[0, T]$ et le système est alors en **boucle ouverte** , ou bien choisir une application fixe Φ telle que pour tout t de $[0, T]$, $\Phi(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et *utiliser* la sortie $x(t)$ pour construire un contrôle de la forme $\Phi(t)x(t)$: le système est alors en **boucle fermée** et le contrôle est **feedback**.

Divers types de contrôle

Si $u(t) \in \mathbb{R}$ ($p = 1$), le système est dit à **simple commande** ; si $p > 1$ le système est dit à **commandes multiples** .

5.1.3 Exemples

Fonctionnelle avec observation distribuée

Choisissons $D = O$ (matrice nulle) : il n'y a pas d'observation finale ;

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^T \langle x(t, v) - z_d(t), Q\,(x(t, v) - z_d(t)) \rangle_n \; dt + \frac{1}{2} \int_0^T \langle v(t), R\, v(t) \rangle_p \; dt\,.$$

Lorsque $Q = I_n$ (matrice identité d'ordre n) et $R = \alpha I_p$ avec $\alpha > 0$, on retrouve l'expression classique d'une fonctionnelle d'énergie :

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^T \|x(t, v) - z_d(t)\|_n^2 \, dt + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \|v(t)\|_p^2 \, dt\,.$$

Fonctionnelle avec observation finale

On choisit cette fois $Q = 0$:

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^T \langle v(t), R\, v(t) \rangle_p \; dt + \langle x(T, v) - z_d(T), D\,(x(T, v) - z_d(T)) \rangle_n \;.$$

Si on prend $D = I_n$ et $R = \alpha I_p$ avec $\alpha > 0$, on obtient

$$J(v) = \frac{1}{2}\|x(T, v) - z_d(T)\|_n^2 \, dt + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \|v(t)\|_p^2 \, dt\,.$$

5.1.4 Etude de la fonction coût

Commençons par une définition

Définition 5.1.2 *J définie est dite λ-convexe si on peut trouver $\lambda > 0$ tel que*

$$J(\frac{u + v}{2}) \leq \frac{1}{2}\,(J(u) + J(v)) - \frac{\lambda}{8}\|u - v\|^2\,.$$

Théorème 5.1.1 *La fonctionnelle J définie par (5.1.3) et (5.1.4) est λ-convexe, strictement convexe et coercive.*

Démonstration - J est convexe.
Il est clair que $\mathcal{J}$ est convexe car les matrices ont été choisies semi-définies positives. D'autre part, $v \to x[v]$ est affine. Par composition J est convexe.
J est coercive.
La matrice R est définie positive. Soit $\beta > 0$ sa plus petite valeur propre. On a donc pour presque tout t dans $[0,T]$

$$\langle v(t), R\,v(t)\rangle_p \geq \beta \|v(t)\|_p^2 \,,$$

$$\frac{1}{2}\int_0^T \langle v(t), R\,v(t)\rangle_p \,dt \geq \frac{\beta}{2}\int_0^T \|v(t)\|_p^2 \,.$$

Par conséquent

$$J(v) \geq \frac{\beta}{2}\|v\|_{\mathcal{U}}^2 \,,$$

ce qui entraîne la coercivité de J, i.e. $\displaystyle\lim_{\|v\|_{\mathcal{U}}\to+\infty} J(v) = +\infty$.
J est λ-convexe.
Soient u et v dans $\mathcal{U}$ et posons $w = \dfrac{u+v}{2}$.

$$\begin{aligned} J(w) = & \frac{1}{2}\int_0^T \langle x(t,w)-z_d(t), Q\,[x(t,w)-z_d(t)]\rangle_n \,dt + \langle x(T,w)-z_d(T), D\,[x(T,w)-z_d(T)]\rangle_n \\ & + \frac{1}{2}\int_0^T \langle w(t), R\,w(t)\rangle_p \,dt \,. \end{aligned}$$

On sait que $v \mapsto x[v]$ est affine, c'est-à-dire , en posant $z_0 = x[0]$, $x[v] = x_H[v] + z_0$ où x_H est linéaire. Pour tout t fixé on obtient :

$$\begin{aligned} x(t,w) - z_d(t) = & \; x_H(t,w) - z_d(t) + z_0(t) \\ = & \; \frac{x_H(t,u) + x_H(t,v)}{2} - z_d(t) + z_0(t) \\ = & \; \frac{x(t,u) + x(t,v)}{2} - z_d(t) \,. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout t et pour toute matrice P

$$\sigma(t) = \left(\frac{x(t,u)+x(t,v)}{2} - z_d(t)\right)^t P \left(\frac{x(t,u)+x(t,v)}{2} - z_d(t)\right) .$$

Pour rendre la démonstration plus lisible, on utilise la notation matricielle $\langle \xi, \zeta \rangle_n = \xi^t \zeta$ pour tous $\xi,\ \zeta$ de $\mathbb{R}^n$, et on a posé $\sigma(t) \stackrel{\text{def}}{=} (x(t,w) - z_d(t))^t \, P \, (x(t,w) - z_d(t))$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}
\sigma(t) = \ & \frac{1}{4}(x(t,u) - z_d(t) + x(t,v) - z_d(t))^t \, P \, (x(t,u) - z_d(t) + x(t,v) - z_d(t)) \\
= \ & \frac{1}{4}(x(t,u) - z_d(t))^t P \, (x(t,u) - z_d(t)) + \frac{1}{4}(x(t,v) - z_d(t))^t P \, (x(t,v) - z_d(t)) \\
& + \frac{1}{2}(x(t,v) - z_d(t))^t P \, (x(t,u) - z_d(t)) \ .
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
& \sigma(t) - \frac{1}{2}(x(t,u) - z_d(t))^t \, P \, (x(t,u) - z_d(t)) - \frac{1}{2}(x(t,v) - z_d(t))^t \, P \, (x(t,v) - z_d(t)) \\
& = -\frac{1}{4}(x(t,u) - z_d(t))^t \, P \, (x(t,u) - z_d(t)) - \frac{1}{4}(x(t,v) - z_d(t))^t \, P \, (x(t,v) - z_d(t)) \\
& \qquad + \frac{1}{2}(x(t,v) - z_d(t))^t \, P \, (x(t,u) - z_d(t)) \\
& = -\frac{1}{4}(x(t,u) - x(t,v))^t \, P \, (x(t,u) - x(t,v)) \\
& \leq 0 \ ,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\sigma(t) \leq 0$. En intégrant et en remarquant que

$$-\frac{1}{4} \left\langle u(t) - v(t), R \, (u(t) - v(t)) \right\rangle_p \leq -\frac{1}{4} \lambda \|u - v\|^2_{\mathcal{U}} \ ,$$

on obtient l'inégalité voulue :

$$J(w) = J\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{1}{2} J(u) + \frac{1}{2} J(v) - \frac{\lambda}{8} \|u - v\|^2_{\mathcal{U}} \ .$$

Enfin la λ-convexité entraîne la stricte convexité. □

Théorème 5.1.2 *La fonctionnelle J définie par (5.1.3) est Gâteaux-différentiable sur $\mathcal{U}$.*

Démonstration - On rappelle que J est Gâteaux-différentiable en $v \in \mathcal{U}$ si

$$\forall w \in L^2(0,T;\mathbb{R}^p) \qquad \lim_{t \to 0^+} \frac{J(v+tw) - J(v)}{t} \stackrel{def}{=} J'(v) \cdot w = \left\langle J'(v), w \right\rangle \ ,$$

où $w \mapsto J'(v) \cdot w$ est linéaire.
Soit $v \in \mathcal{U}$. Montrons tout d'abord que $\mathcal{J}$ est Gâteaux-différentiable en v et on conclura par composition : en effet

$$J'_v(v) \cdot w = \mathcal{J}'_{(x,v)}(x(v), v)(x'_v(v) \cdot w, w) \ .$$

Comme $v \mapsto x(v)$ est affine, $x'_v(v) \cdot w = x(w) - x(0) \ = x_H(w)$.

Soit $w \in L^2(0,T;\mathbb{R}^p)$ et z dans l'espace d'état associé. Comme l'expression de $\mathcal{J}$ est "symétrique" en v et en x on ne calcule la Gâteaux-dérivée que pour le terme en v.
Le terme correspondant dans $\dfrac{J(x+\tau z, v+tw) - J(x,v)}{\tau}$ est

$$\frac{1}{2\tau}\left[\int_0^T \langle v(t)+\tau w(t), R\,v(t)+\tau w(t)\rangle_p\ dt - \int_0^T \langle v(t), R\,v(t)\rangle_p\ dt\right]$$

$$= \frac{1}{2\tau}\left[2\tau\int_0^T \langle v(t), R\,w(t)\rangle_p\ dt + \tau^2\int_0^T \langle w(t), R\,w(t)\rangle_p\ dt\right] .$$

Le passage à la limite quand τ tend vers 0 donne donc

$$\int_0^T \langle v(t), R\,w(t)\rangle_p\ dt .$$

Un calcul analogue permet d'établir la Gâteaux-dérivée de $\mathcal{J}$ en (x,v).

$$\mathcal{J}'_{x,v}(x,v)(z,w) = \int_0^T \left[\langle x(t)-z_d(t), Qz(t)\rangle_n + \langle v(t), R\,w(t)\rangle_p\right] dt + \langle x(T)-z_d(T), D\,z(T)\rangle_n . \quad (5.1.5)$$

On peut alors en déduire la Gâteaux-dérivée de J en v dans la direction w.

$$\begin{aligned} J'(v)w = & \int_0^T \left[\langle x[v](t)-z_d(t), Q(x(t,w)-x[0](t))\rangle_n + \langle v(t), R\,w(t)\rangle_p\right] dt \\ & + \langle x[v](T)-z_d(T), D(x[w](T)-x[0](T))\rangle_n . \end{aligned}$$

En particulier pour $w = u - v$ on obtient

$$\begin{aligned} J'(v)(u-v) = & \int_0^T \left[\langle x[v](t)-z_d(t), Q(x[u](t)-x[v](t))\rangle_n + \langle v(t), R\,u(t) - v(t)\rangle_p\right] dt \\ & + \langle x[v](T)-z_d(T), D(x[u](T)-x[v](T))\rangle_n . \end{aligned}$$

□

Pour éviter les confusions, nous adoptons volontairement deux notations pour désigner la dérivation : la notation J' désigne la Gâteaux-dérivée de la **fonctionnelle** J (par rapport à une fonction x ou v donc) et la notation $\dfrac{dx}{dt}$ désigne la dérivée usuelle de la fonction x par rapport à la variable t.

5.1.5 Existence et unicité de la solution de $(\mathcal{P})$

Théorème 5.1.3 *Le problème $(\mathcal{P})$ admet une solution unique.*

Démonstration - C'est un résultat classique d'existence dans les espaces de Hilbert car J est convexe, continue et coercive et $\mathcal{U}$ est (convexe) fermé. L'unicité provient de la stricte convexité de J et de la convexité de U.
On peut toutefois donner une démonstration directe. Comme J est positive, $m = \inf_{v \in \mathcal{U}} J(v) \geq 0$. Soit v_n une suite minimisante :

$$v_n \in \mathcal{U} \text{ et } J(v_n) \to m \,.$$

Grâce la λ-convexité, on a

$$J(\frac{v_n + v_q}{2}) \leq \frac{1}{2}\,[J(v_n) + J(v_q)] - \frac{\lambda}{8}\|v_n - v_q\|^2_{\mathcal{U}} \,.$$

D'où

$$\frac{\lambda}{8}\|v_n - v_q\|^2_{\mathcal{U}} \leq \frac{1}{2}\,[J(v_n) + J(v_q)] - m \,,$$

et par passage à la limite on voit que (v_n) est une suite de Cauchy. L'espace des contrôles étant un espace de Hilbert, cette suite converge vers une limite $\bar{v}$ (dans $\mathcal{U}$, car $\mathcal{U}$ est fermé). De plus J est continue : on a donc bien $J(\bar{v}) = m$.
Supposons qu'on ait deux solutions u et v de $(\mathcal{P})$. L'inégalité de λ-convexité donne encore :

$$0 \leq \frac{\lambda}{8}\|u - v\|^2_{\mathcal{U}} \leq \frac{1}{2}\,[J(u) + J(v)] - m \;= 0 \,.$$

Par conséquent, la solution est unique. □

5.2 Conditions d'optimalité

Nous savons maintenant que le problème $(\mathcal{P})$ admet une solution unique $\bar{v}$. On notera $\bar{x} = x(\bar{v})$ l'état associé. On sait également que J est Gâteaux-différentiable. Par conséquent, nous avons la condition nécessaire d'optimalité du premier ordre (3.2.1) démontrée dans le chapitre 3 - section 3.2 .

$$\forall v \in \mathcal{U} \qquad J'(\bar{v})(v - \bar{v}) \geq 0 \,.$$

Nous savons d'autre part que cette condition est **nécessaire et suffisante** car J est convexe (ainsi que $\mathcal{U}$).

5.2.1 Un exemple.

Avant de calculer $J'(\bar{v})(v - \bar{v})$ dans le cas général, commençons par un cas simple : $n = p = 1,\; Q = 1,\; D = O$ et $R = \alpha > 0$. Dans ce cas x et v sont des fonctions scalaires à valeurs dans $\mathbb{R}$. La fonction coût s'écrit alors

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_0^T \,[x_v(t) - z_d(t)]^2\, dt + \frac{\alpha}{2}\int_0^T \,[v(t)]^2\, dt \,,$$

où x_v est solution de l'EDO

$$\frac{dx}{dt}(t) = a\,x(t) + b\,v(t) \;\text{ dans }]\,0, T[\text{ et } x(0) = 0 \,.$$

Supposons de plus qu'il n'y a pas de contraintes sur le contrôle : $\mathcal{U} = L^2(0,T)$; une condition nécessaire et suffisante d'optimalité est alors

$$J'(\bar{v}) = 0 ,$$

où $\bar{v}$ est la solution du problème de contrôle optimal. Cela donne, pour tout $v \in L^2(0,T)$:

$$\int_0^T [\bar{x}(t) - z_d(t)][x_v(t) - \bar{x}(t)]\, dt + \alpha \int_0^T [\bar{v}(t)][v(t) - \bar{v}(t)]\, dt = 0 ,$$

où $\bar{x} = x_{\bar{v}}$. Introduisons une variable auxiliaire solution de l'équation (dite adjointe) suivante :

$$-\frac{d\bar{p}}{dt}(t) = a\,\bar{p}(t) + \bar{x}(t) - z_d(t) \;\text{ dans }]\,0,T\,[\text{ et } \bar{p}(T) = 0 .$$

Par intégration par parties, nous obtenons

$$\int_0^T [b\,\bar{p}(t) + \alpha\bar{v}(t)][v(t) - \bar{v}(t)]\, dt = 0 ,$$

c'est-à-dire $b\,\bar{p}(t) + \alpha\bar{v}(t) = 0$. Finalement la solution optimale est caractérisée par le système d'optimalité suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\bar{x}}{dt}(t) = a\,\bar{x}(t) + b\,\bar{v}(t) \;\text{ dans }]\,0,T\,[\text{ et } \bar{x}(0) = 0 , \\ -\dfrac{d\bar{p}}{dt}(t) = a\,\bar{p}(t) + \bar{x}(t) - z_d(t) \;\text{ dans }]\,0,T\,[\text{ et } \bar{p}(T) = 0 , \\ \bar{v} = -\dfrac{b\,\bar{p}}{\alpha} . \end{array}\right.$$

c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\bar{x}}{dt}(t) = a\,\bar{x}(t) - \dfrac{b^2}{\alpha}\bar{p}(t) \;\text{ dans }]\,0,T\,[\text{ et } \bar{x}(0) = 0 , \\ -\dfrac{d\bar{p}}{dt}(t) = \bar{x}(t) + a\,\bar{p}(t) - z_d(t) \;\text{ dans }]\,0,T\,[\text{ et } \bar{p}(T) = 0 . \end{array}\right. \tag{5.2.1}$$

5.2.2 Cas général.

Calculons maintenant $J'(\bar{v})(v - \bar{v})$:

$$\begin{aligned} J'(\bar{v})(v-\bar{v}) = & \int_0^T \left[\langle \bar{x}(t) - z_d(t), Q(x(t) - \bar{x}(t)) \rangle_n + \langle \bar{v}(t), R\,(v(t) - \bar{v}(t)) \rangle_p \right] dt \\ & + \langle \bar{x}(T) - z_d(T), D\,(x(T) - \bar{x}(T)) \rangle_n , \end{aligned}$$

où on a posé $x = x(v)$. Les différentes matrices sont symétriques, donc

$$\begin{aligned} J'(\bar{v})(v-\bar{v}) = & \left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^T \langle Q\,(\bar{x}(t) - z_d(t)), x(t) - \bar{x}(t) \rangle_n\, dt \\ + \langle D\,(\bar{x}(T) - z_d(T)), x(T) - \bar{x}(T) \rangle_n \end{array}\right\} \quad (a) \\ & + \int_0^T \langle R\,\bar{v}(t), v(t) - \bar{v}(t) \rangle_p\, dt \;. \qquad\qquad (b) \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

On va transformer cette expression par **intégration par parties**, pour se ramener à des données "connues". Par exemple, on ne connaît pas $x(T)$ mais $x(0)$ grâce à l'équation d'état. Tout d'abord définissons **l'état adjoint** de la manière suivante : $\bar{p}$ est la solution de l'EDO (rétrograde) dite **équation adjointe**

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\bar{p}}{dt}(t) &= -A^t\,\bar{p}(t) - Q\,(\bar{x}(t) - z_d(t)), \text{ sur }]0,T[\\ \bar{p}(T) &= D\,[\bar{x}(T) - z_d]\ , \end{aligned} \right. \tag{5.2.3}$$

où A^t désigne la matrice transposée de A. L'équation (5.2.2) devient

$$\begin{aligned} J'(\bar{v})(v-\bar{v}) = \ & \int_0^T \left[\left\langle -A^t\,\bar{p}, x(t) - \bar{x}(t) \right\rangle_n - \left\langle \frac{d\bar{p}}{dt}(t), x(t) - \bar{x}(t) \right\rangle_n \right] dt \\ & + \int_0^T \langle R\,\bar{v}(t), v(t) - \bar{v}(t) \rangle_p \, dt \\ & + \langle \bar{p}(T), x(T) - \bar{x}(T) \rangle_n \, . \end{aligned}$$

Intégrons par parties le terme (a) de (5.2.2) :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left\langle \frac{d\bar{p}}{dt}(t), x(t) - \bar{x}(t) \right\rangle_n dt \\ &= \left[\langle \bar{p}(T), x(T) - \bar{x}(T) \rangle_n - \langle \bar{p}(0), x(0) - \bar{x}(0) \rangle_n \right] - \int_0^T \left\langle \bar{p}(t), \frac{dx}{dt}(t) - \frac{d\bar{x}}{dt}(t) \right\rangle_n dt \\ &= \langle \bar{p}(T), x(T) - \bar{x}(T) \rangle_n - \int_0^T \left\langle \bar{p}(t), \frac{dx}{dt}(t) - \frac{d\bar{x}}{dt}(t) \right\rangle_n dt \\ &= \langle \bar{p}(T), x(T) - \bar{x}(T) \rangle_n - \int_0^T \langle \bar{p}(t), A(x(t) - \bar{x}(t)) + B(v(t) - \bar{v}(t)) \rangle_n \, dt \, . \end{aligned}$$

(a) se réduit donc à :

$$\int_0^T \langle \bar{p}(t), B(v(t) - \bar{v}(t)) \rangle_n \, dt \ = \int_0^T \left\langle B^t \bar{p}(t), v(t) - \bar{v}(t) \right\rangle_n dt \, .$$

Finalement

$$J'(\bar{v})(v-\bar{v}) = \int_0^T \left\langle B^t\,\bar{p} + R\,\bar{v}(t), v(t) - \bar{v}(t) \right\rangle_p dt \ \geq 0. \tag{5.2.4}$$

On obtient donc le théorème suivant :

Théorème 5.2.1 *La solution $\bar{v}$ du problème $(\mathcal{P})$ est caractérisée par les conditions d'optimalité du premier ordre suivantes :*

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}}{dt}(t) = A\,\bar{x}(t) + B\,\bar{v}(t) + f(t) \textit{ sur }]\,0,T[,\ \bar{x}(0) = x_0\ : & \textit{Equation d'état} \\ \dfrac{d\bar{p}}{dt}(t) = -A^t\bar{p}(t) - Q\,(\bar{x}(t) - z_d(t)) \textit{ sur }]\,0,T[, \bar{p}(T) = D(\bar{x}(T) - z_d(T))\ : & \textit{Equation adjointe} \\ \forall v \in \mathcal{U} \qquad \displaystyle\int_0^T \left\langle B^t\,\bar{p}(t) + R\,\bar{v}(t), v(t) - \bar{v}(t) \right\rangle_p dt \ \geq 0\, . & \end{cases}$$