Chapitre 2

Contrôle Optimal de Problèmes Elliptiques (EDPs)

On va s'intéresser plus particulièrement à des systèmes dont l'état est décrit par une équation aux dérivées partielles (EDP) elliptique . On va d'abord préciser dans quel cadre on se place (théorie variationnelle) et définir rigoureusement ce qu'on entend par solution **faible** d'une EDP ou solution **au sens des distributions**.

2.1 Théorie variationnelle elliptique dans les espaces de Hilbert

Sauf mention du contraire, on considère dans toute la section un espace de Hilbert V de dual (topologique) V'; on identifiera V à V' grâce au théorème de Riesz si nécessaire. On note $\| \ \|_V$ la norme de V.

2.1.1 Théorème de Lax-Milgram

On suppose connues les propriétés élémentaires des fonctions et fonctionnelles convexes ainsi que la notion de Gâteaux-différentiabilité (voir [ET] par exemple). Nous rappelons toutefois une propriété importante de semi-continuité des fonctionnelles convexes.

Définition 2.1.1 *Une fonction J de V dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est semi-continue inférieurement (sci) sur V si elle satisfait aux conditions équivalentes :*

- $\forall a \in \mathbb{R}, \qquad \{ \ u \in V \ \mid \ J(u) \leq a \ \}$ *est fermé*
- $\forall \bar{u} \in V, \qquad \liminf_{u \to \bar{u}} J(u) \geq J(\bar{u})$.

Théorème 2.1.1 *Toute fonction **convexe** sci pour la topologie forte (celle de la norme) de V est encore sci pour la topologie faible de V.* □

En pratique ce résultat s'utilise sous la forme du corollaire suivant :

Corollaire 2.1.1 *Soit J une fonctionnelle convexe de V dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sci (par exemple continue) pour la topologie forte. Si v_n est une suite de V **faiblement convergente** vers v alors*

$$J(v) \leq \liminf_{n\to+\infty} J(v_n) \ .$$

□

Commençons par un résultat très général de minimisation d'une fonctionnelle convexe sur un ensemble convexe fermé de V qui généralise celui que nous avons vu dans le chapitre précédent.

Théorème 2.1.2 *On suppose que V est un Banach réflexif. Soit J une fonctionnelle de V dans $\overline{\mathbb{R}}$, convexe et semi-continue inférieurement. Soit K un sous-ensemble convexe, non vide et fermé de V. On suppose que J est **propre** (c'est-à-dire qu'il existe un élément v_o de K tel que $J(v_o) < +\infty$. Alors le problème de minimisation suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Trouver } u \textit{ tel que} \\ J(u) = \inf \ \{ \ J(v) \mid v \in K \ \} \ , \end{array} \right. \tag{2.1.1}$$

admet au moins une solution dans l'un des cas suivants :

- *soit J est coercive i.e. $\displaystyle\lim_{\|v\|_V \to +\infty} J(v) = +\infty$,*
- *soit K est borné.*

Si, de plus, J est strictement convexe la solution est unique.

Preuve.- On pose $d = \inf \ \{ \ J(v) \mid v \in K \ \}$; $d < +\infty$, sinon J serait identiquement égale à $+\infty$ sur K.

Soit une suite minimisante, c'est-à-dire une suite u_n de K telle que $J(u_n) \to d$. Montrons que cette suite est bornée dans V. Si K est borné, c'est clair. Sinon, on suppose que J est coercive. Si u_n n'est pas bornée, on peut en extraire une sous-suite encore notée u_n telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|u_n\|_V = +\infty$. La coercivité de J implique alors que $J(u_n)$ converge vers $+\infty$ ce qui est en contradiction avec le fait que $d < +\infty$.

V est un Banach réflexif, donc sa boule unité est faiblement compacte; on peut donc extraire de la suite u_n une sous-suite encore notée u_n qui converge faiblement vers u dans V. On va montrer que u est solution de (2.1.1).

Remarquons tout d'abord que K est un ensemble convexe (fortement) fermé, donc faiblement fermé (voir [Br] par exemple). Par conséquent la limite faible u de la suite u_n de K est bien un élément de K.
D'autre part, on sait que J est sci; on a donc

$$u_n \rightharpoonup u \text{ dans } V \Rightarrow J(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} J(u_n) \ ,$$

ce qui donne

$$J(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} J(u_n) = \lim_{n\to+\infty} J(u_n) = d \leq J(u) \ .$$

On a donc $J(u) = d$ et $u \in K$: u est bien solution.
• Montrons à présent l'unicité lorsque J est strictement convexe; soient u et v deux solutions distinctes de (2.1.1). u et v sont dans le convexe K donc $\dfrac{u+v}{2}$ aussi. Par conséquent

$$d \leq J(\frac{u+v}{2}) < \frac{J(u)+J(v)}{2} = d \ .$$

Il y a contradiction, et de fait la solution est unique. □
Rappelons enfin le Théorème 1.2.9 démontré dans le chapitre 1 :

Théorème 2.1.3 *Soient K un sous-ensemble convexe, non vide de V et J une fonctionnelle de K vers $\mathbb{R}$ convexe et Gâteaux-différentiable sur K. Soit u dans V; alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) u est solution du problème (2.1.1) .
(ii) $u \in K$ et $\forall v \in K, \qquad \nabla J(u).(v-u) \geq 0$.

□

Une application très importante de ces deux théorèmes est le théorème de **L**ax-Milgram:

Théorème 2.1.4 *Soit V un espace de Hilbert et a une forme bilinéaire continue sur $V \times V$. On suppose que a est V- elliptique (ou coercive), i.e.:*

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall v \in V \qquad a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \ . \tag{2.1.2}$$

Soit $L \in V'$. Alors le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{Trouver } u \in V \textit{ tel que} \\ \forall v \in V \quad a(u,v) = L(v) \end{array} \right. \tag{2.1.3}$$

a une solution unique.

Preuve.- On pose

$$\forall v \in V, \qquad J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v) \ .$$

Il est facile de voir que J est convexe à cause de la bilinéarité de a et de la linéarité de L. J est strictement convexe grâce à la V-ellipticité de a. La V-ellipticité de a entraîne aussi la coercivité de J; en effet, nous avons :

$$J(v) \geq \alpha\|v\|_V^2 - L(v) \geq \alpha\|v\|_V^2 - \|L\|_{V'}\|v\|_V \ .$$

Enfin il est clair que J est continue pour la topologie forte de V, donc sci. De plus comme elle est convexe, elle est aussi sci pour la topologie faible.
Par conséquent, d'après le théorème 2.1.2 le problème

$$\min \ \{ \ \frac{1}{2}a(v,v) - L(v) \mid v \in V \ \} \ , \tag{2.1.4}$$

admet une solution unique u.
Grâce au Théorème 2.1.3 on peut maintenant caractériser cette solution u dans le cas où a est **symétrique**. Un calcul élémentaire montre que

$$\forall v \in V \qquad \nabla J(u).(v-u) = a(u, v-u) - L(v-u) \ .$$

Donc la solution u est caractérisée par :

$$\forall v \in V \qquad a(u, v-u) - L(v-u) \geq 0 \ ,$$

c'est-à-dire

$$\forall v \in V \qquad a(u,v) = L(v) \ .$$

Lorsque a n'est pas symétrique le résultat est encore vrai mais la démonstration est moins immédiate (elle est en tout cas différente). Nous renvoyons à [DL] Tome VI, p 1206. $\square$
Nous allons interpréter ce résultat. Soit u dans V et $A_u \in V'$ défini par :

$$\begin{aligned} & V \to \mathbb{R} \\ A_u : \ & v \mapsto a(u,v) \ . \end{aligned}$$

Soit maintenant l'opérateur A de V dans V' défini par

$$\forall u \in V \qquad Au = A_u \ .$$

Il est facile de voir que A est linéaire et que le problème (2.1.3) est équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \qquad Au = L \ . \end{array} \right. \tag{2.1.5}$$

On a alors la proposition suivante, conséquence immédiate du théorème de Lax-Milgram :

Proposition 2.1.1 *L'opérateur A est un isomorphisme (algébrique et topologique) de V dans V'.*

Preuve.- A est linéaire. Le théorème de Lax-Milgram prouve que A est un isomoprhisme algébrique de V dans V'. La continuité de A provient de celle de a; plus précisément, pour tout u de V :

$$\|Au\|_{V'} = \sup_{v\neq 0} \frac{|\langle Au, v\rangle_{V',V}|}{\|v\|_V} = \sup_{v\neq 0} \frac{|a(u,v)|}{\|v\|_V} \leq \|a\| \ \|u\|_V \ .$$

$\langle u, v\rangle_{V,V'}$ désigne le crochet de dualité entre V et V'.
On conclut que A^{-1} est aussi continu grâce au théorème de l'application ouverte. $\square$

Cas particulier important

Soient V et H deux espaces de Hilbert tels que V est inclus dans H avec injection continue. On suppose également que V est dense dans H. On peut identifier H et H' par le théorème de Riesz et on a grâce à la densité :

$$V \subset H \subset V' \ , \tag{2.1.6}$$

avec injections continues et denses. H s'appelle l'espace **pivot**.

Remarque 2.1.1 *On ne peut pas identifier* ***en même temps*** *V et V' et H avec H', car alors (2.1.6) devient absurde. On ne peut faire qu'une "identification" à la fois; c'est la précédente qu'on utilisera.*

On va voir que sous certaines conditions, on peut considérer l'opérateur continu A de V dans V', comme un opérateur non borné de $D(A) \subset V$ dans H. Nous allons illustrer cela avec l'exemple $A = -\Delta$.

Rappelons tout d'abord quelques propriétés des espaces de Sobolev dont nous aurons besoin.

2.1.2 Généralités sur les espaces de Sobolev

Pour plus de précisions on pourra se référer à [DL].
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, ($n \leq 3$ en pratique) de frontière régulière Γ. On appelle $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Ω. Son dual $\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace des **distributions** sur Ω.
Pour toute distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, la dérivée $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ est définie de la manière suivante :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} \overset{def}{\equiv} - \left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} .$$

On notera indifféremment la dérivée de u au sens des distributions $D_i u = \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \partial_i u$.
si $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on note $D^\alpha u = \partial_1^{\alpha_1} u \cdots \partial_n^{\alpha_n} u$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$; on obtient

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad \langle D^\alpha u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} .$$

Définition 2.1.2 *On définit les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$ de la manière suivante :*

$$H^1(\Omega) = \{ \ u \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \ i = 1 \cdots n \ \} ,$$

$$H^m(\Omega) = \{ \ u \in \mathcal{D}'(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^2(\Omega), \ |\alpha| \leq m \ \} .$$

Remarque 2.1.2 $H^o(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Nous allons énoncer une série de propriétés des espaces de Sobolev, sans démonstration. On pourra consulter [DL, LM] par exemple.

Proposition 2.1.2 *$H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire :*

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) \ D^\alpha v(x) \ dx ,$$

est un espace de Hilbert.

Proposition 2.1.3

$$H^m(\Omega) \subset H^{m'}(\Omega)$$

et l'injection est continue, pour $m \geq m'$.

Définition 2.1.3

$$H_o^1(\Omega) = \{ \ u \in H^1(\Omega) \mid u_{|\Gamma} = 0 \ \} .$$

C'est aussi l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

$$H_o^m(\Omega) = \{ \ u \in H^1(\Omega) \mid \frac{\partial^j u}{\partial n^j}_{|\Gamma} = 0, \ j = 1, \cdots, m-1 \} ,$$

où $\dfrac{\partial}{\partial n}$ est la dérivée de u suivant la normale extérieure à Γ la frontière de Ω :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} cos(\vec{n}, \vec{e_i}) ,$$

où $\vec{n}$ est la normale extérieure à Γ et Ω est supposé "régulier" (de frontière $\mathcal{C}^\infty$ par exemple).

Définition 2.1.4 (Dualité) *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $H^{-m}(\Omega)$ le dual de $H_o^m(\Omega)$.*

Théorème 2.1.5 (Rellich) *Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'injection de $H_o^{m+1}(\Omega)$ dans $H_o^m(\Omega)$ est compacte .*

En particulier l'injection de $H_o^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte. **En pratique, cela signifie que toute suite bornée en norme $H_o^1(\Omega)$ converge faiblement dans $H_o^1(\Omega)$ (après extraction d'une sous-suite) et fortement dans $L^2(\Omega)$.**

Nous allons à présent donner un exemple important d'application du Théorème de Lax-Milgram pour la résolution de problèmes aux limites.

2.1.3 Problème homogène de Dirichlet

Dans cet exemple on choisit $V = H_o^1(\Omega)$ muni du produit scalaire :

$$(u,v)_1 = \int_\Omega \sum_{i=1}^n [(D_i u \ D_i v) + uv] \ dx \ .$$

On se donne la forme bilinéaire suivante

$$a(u,v) \overset{def}{\equiv} \int_\Omega \sum_{i=1}^n (D_i u \ D_i v) \ dx \ = \int_\Omega \nabla u(x) \ \nabla v(x) \ dx \ .$$

a est bilinéaire de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$; elle est continue car :

$$|a(u,v)| \leq \|u\|_V \ \|v\|_V \ ,$$

de manière évidente, et symétrique.
a est V-elliptique d'après l'inégalité de **Poincaré**

$$\forall u \in H_o^1(\Omega) \qquad \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \ . \tag{2.1.7}$$

En effet on obtient alors

$$(1+C)\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u\|_1^2 \ ,$$

c'est-à-dire

$$a(u,u) \geq \frac{1}{1+C}\|u\|_1^2 \ .$$

Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$ et $L(v) \equiv \int_\Omega f(x) \ v(x) \ dx$ pour tout v de $H_o^1(\Omega)$.
On sait que le problème variationnel

$$\forall v \in H_o^1(\Omega) \qquad \int_\Omega \nabla u(x) \ \nabla v(x) \ dx = \int_\Omega f(x) \ v(x) \ dx \ ,$$

admet une solution unique $u \in H^1_o(\Omega)$.

Quelle est l'interprétation de ce problème variationnel ?

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset H^1_o(\Omega)$;

$$\langle -\Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u(x)\ \nabla \varphi(x)\ dx = \langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} \ .$$

On obtient

$$-\Delta u = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \ .$$

Comme $u \in H^1_o(\Omega)$, on a également : $u \equiv 0$ sur Γ. Ce problème est le problème de **Dirichlet homogène** pour le laplacien :

$$(DH) \qquad \left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f & \text{dans } \Omega \\ u & = & 0 & \text{sur } \Gamma \ , \end{array} \right.$$

et on a le résultat suivant :

Théorème 2.1.6 *L'opérateur $-\Delta$ (laplacien) est un isomorphisme de $H^1_o(\Omega)$ sur $H^{-1}(\Omega)$.*

□

Par ailleurs $H^1_o(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ avec injection dense et continue. Donc

$$H^1_o(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) \ .$$

On peut considérer $(-\Delta)$ comme un opérateur non borné à valeurs dans $H = L^2(\Omega)$. Le domaine de $(-\Delta)$ est alors

$$D(-\Delta) = \{ \ u \in H^1_o(\Omega) \mid \Delta u \in L^2(\Omega) \ \} \ .$$

On montre que si Ω est de frontière assez régulière

$$D(-\Delta) = H^2(\Omega) \cap H^1_o(\Omega) \ ,$$

et on même le résultat suivant :

Proposition 2.1.4 *L'opérateur $-\Delta$ est un isomorphisme de $H^2(\Omega) \cap H^1_o(\Omega)$ muni de la norme du graphe sur $L^2(\Omega)$.*

□

Remarque 2.1.3 *C'est surtout l'exemple du Laplacien qui nous servira. Toutefois ce qui précède (en particulier le théorème 2.1.6) est encore vrai pour une forme bilinéaire a plus générale que celle qui induit le Laplacien, pourvu qu'elle vérifie*

$$\left\{\begin{array}{l} a(\varphi,\psi) = \displaystyle\int_\Omega \left[\sum_{ij} a_{ij}(x)\partial_i\varphi(x)\ \partial_j\psi(x)\right]\ dx + \int_\Omega a_o(x)\ \varphi(x)\psi(x)\ dx\ , \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{avec } a_{ij}, a_o \in L^\infty(\Omega) \textit{ telles que} \\ \exists \alpha > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \displaystyle\sum_{ij} a_{ij}\xi_i\xi_i \geq \alpha(\sum_i \xi_i^2) \textit{ et } a_o(x) \geq 0 \textit{ p.p. dans } \Omega\ . \end{array}\right. \tag{2.1.8}$$

En conclusion, quand on parlera de solutions, ce sera toujours de solutions **f**aibles , i.e. au sens des distributions. On trouvera d'autres exemples dans [Li].

On va maintenant montrer comment contrôler le système via l'équation d'état. On va introduire une fonction de contrôle, grâce à laquelle on va pouvoir agir sur le système. L'action ne doit pas se faire n'importe comment mais de manière optimale par rapport à un critère (ou coût) donné. Ceci justifie la terminologie de **Contrôle Optimal**. Nous allons, à présent modéliser ceci et en donner une traduction mathématique précise.

2.2 Formulation du problème de contrôle optimal

On se donne (comme dans la section précédente) V et H deux espaces de Hilbert tels que

$$\begin{array}{c} V \subset H \subset V' \\ \text{avec injections denses et continues .} \end{array} \tag{2.2.9}$$

On considère également une forme

$$a \text{ bilinéaire, continue et } V-\text{elliptique (voir 2.1.2)}\ , \tag{2.2.10}$$

et on note A l'isomorphisme qu'elle induit de V sur V' (voir Théorème 2.1.1).
On se donne successivement

- l'espace de Hilbert $\mathcal{U}$ des fonctions de **contrôle** et un opérateur $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, V')$.

  Pour chaque contrôle u dans $\mathcal{U}$, l'état du système est donné par y la solution de **l'équation d'état** :

  $$Ay = f + Bu \quad , \quad y \in V\ , \tag{2.2.11}$$

  où $f \in V'$. Cette équation donne y en fonction de u de façon unique : on note $y = y(u)$.

- l'**observation** de y :

$$z(u) = \mathcal{C}y(u) \ , \tag{2.2.12}$$

  où $\mathcal{C} \in \mathcal{L}(V, \mathcal{H})$ et $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert.

- une fonctionnelle **coût** J :

$$\forall u \in \mathcal{U} \qquad J(u) = \frac{1}{2}\|\mathcal{C}y(u) - z_d\|^2_{\mathcal{H}} + \frac{1}{2}(\mathcal{N}u, u)_{\mathcal{U}} \ , \tag{2.2.13}$$

  où $z_d \in \mathcal{H}$ est l'**état désiré** et $\mathcal{N}$ est un opérateur linéaire défini positif autoadjoint :

$$\mathcal{N} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{U}) \quad \text{et} \quad \exists \alpha > 0 \text{ tel que } (\mathcal{N}u, u)_{\mathcal{U}} \geq \alpha \|u\|^2_{\mathcal{U}} \ . \tag{2.2.14}$$

  En pratique on choisit souvent $\mathcal{N} = \alpha Id_{\mathcal{U}}$.

- un ensemble de **contraintes** sur le contrôle :

$$U_{ad} \text{ sous-ensemble convexe fermé non vide de } \mathcal{U} \ . \tag{2.2.15}$$

Le problème de contrôle optimal se formule alors de la manière suivante:

$$(\mathcal{P}) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \text{Trouver u } \in U_{ad} \text{ tel que} \\ J(u) = \min \ \{ \ J(v) \mid v \in U_{ad} \ \} \ . \end{array} \right.$$

Enonçons tout d'abord un résultat d'existence et d'unicité :

Théorème 2.2.1 *Sous les hypothèses (2.2.10) et (2.2.14) il existe un unique $\bar{u}$ dans U_{ad} tel que*

$$J(\bar{u}) = \min \ \{ \ J(v) \mid v \in U_{ad} \ \} \ .$$

Preuve.- C'est une application directe du Théorème 2.1.2. Il suffit d'en vérifier les hypothèses.

- U_{ad} est bien non vide, convexe et fermé.

- J est convexe car A est linéaire. Plus précisément, l'application $u \mapsto y(u)$ est affine et donc l'application $\ell(u) = y(u) - y(0)$ est linéaire.

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\|\mathcal{C}(y(u) - y(0)) + \mathcal{C}y(0) - z_d\|^2_{\mathcal{H}} + \frac{1}{2}(\mathcal{N}u, u)_{\mathcal{U}} \\ &= \frac{1}{2}\|\mathcal{C}\ell(u) + \mathcal{C}y(0) - z_d\|^2_{\mathcal{H}} + \frac{1}{2}(\mathcal{N}u, u)_{\mathcal{U}} \ . \end{aligned}$$

  Posons

$$\pi(u, v) = (\mathcal{C}\ell(u), \mathcal{C}\ell(v)_{\mathcal{H}} + (\mathcal{N}u, v)_{\mathcal{U}} \ , \ \text{et}$$

$$L(v) = (z_d - \mathcal{C}y(0), \mathcal{C}\ell(v)_{\mathcal{H}} \ .$$

π est bilinéaire et continue et L est linéaire, continue sur $\mathcal{U}$. Comme

$$J(v) = \frac{1}{2}\pi(v,v) - L(v) + \frac{1}{2}\|\mathcal{C}y(0) - z_d\|_{\mathcal{H}}^2$$

J est donc convexe. Elle est même strictement convexe car $v \mapsto \pi(v,v)$ l'est, du fait que $\mathcal{N}$ est défini positif.

- L est continue. De plus $v \mapsto \pi(v,v)$ est continue (fort) donc fortement sci; comme elle est convexe elle est aussi sci faible. Par conséquent J est sci.

- Montrons enfin la coercivité de J.

$$\forall v \in \mathcal{U} \quad \pi(v,v) = \|\mathcal{C}\ell(v)\|_{\mathcal{H}}^2 + (\mathcal{N}v, v)_{\mathcal{U}} \geq (\mathcal{N}v, v)_{\mathcal{U}} \geq \nu\|v\|_{\mathcal{U}}^2 \ .$$

De plus

$$L(v) \leq |L(v)| \leq \|\mathcal{C}y(0) - z_d\|_{\mathcal{H}}\|\mathcal{C}\|\|l(v)\| \leq c_o \ \|v\|_{\mathcal{U}} \ ;$$

Par conséquent

$$J(v) \geq \frac{\nu}{2}\|v\|_{\mathcal{U}}^2 - c_o\|v\|_{\mathcal{U}} + \frac{1}{2}\|\mathcal{C}y(0) - z_d\|_{\mathcal{H}}^2 \ ,$$

ce qui montre bien la coercivité.

□

Remarque 2.2.1 *On a le même résultat d'existence si $\mathcal{N} \equiv 0$, à condition de supposer U_{ad} borné dans $\mathcal{U}$. L'unicité en revanche dépend de la stricte convexité de J et des propriétés de $\mathcal{C}$.*

Que faire maintenant ?

On sait que le contrôle optimal existe et est unique : il faut donc se donner les moyens de le calculer; ceci va se faire en deux temps :

1. On va d'abord établir des conditions nécessaires (et si possible suffisantes) d'optimalité, essentiellement par dérivation.

2. Il faudra ensuite exploiter les équations obtenues pour obtenir des informations sur le contrôle optimal, et/ou mettre en place des méthodes numériques permettant de le calculer.

2.3 Conditions d'optimalité du premier ordre

Il s'agit de donner une caractérisation du contrôle optimal; pour cela on va appliquer le Théorème 2.1.3. Il suffit de montrer que la fonctionnelle J est Gâteaux-différentiable et de calculer sa Gâteaux-différentielle. Ainsi nous aurons la caractérisation désirée, à savoir

$$\bar{u} \text{ est le contrôle optimal } \Leftrightarrow \forall v \in U_{ad} \quad \nabla J(\bar{u}).(v-\bar{u}) \geq 0 \ .$$

Lemme 2.3.1 *La fonctionnelle J définie précédemment est Gâteaux-différentiable sur $\mathcal{U}$ et*

$$\forall v \in U_{ad} \qquad \nabla J(u).(v-u) = (\mathcal{C}y(u) - z_d, \mathcal{C}(y(v)-y(u)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{N}u, v-u)_{\mathcal{U}} \ .$$

Preuve.- On a vu que A est un isomorphisme de V sur V', et donc l'équation d'état s'écrit

$$y(u) = A^{-1}(f+Bu) \ .$$

(On vérifie bien que l'application $u \mapsto y(u)$ est affine de $\mathcal{H}$ dans V).
Soient u et w dans $\mathcal{U}$, et calculons

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{J(u+tw)-J(u)}{t} \ .$$

$$J(u+tw) = \frac{1}{2}\|\mathcal{C}y(u+tw) - z_d\|^2_{\mathcal{H}} + \frac{1}{2}(\mathcal{N}(u+tw),(u+tw))_{\mathcal{U}} \ .$$

$$\mathcal{C}y(u+tw) = \mathcal{C}[A^{-1}f + A^{-1}B(u+tw)] = \mathcal{C}y(u) + t\mathcal{C}A^{-1}Bw \ .$$

$$\|\mathcal{C}y(u+tw) - z_d\|^2_{\mathcal{H}} = \|\mathcal{C}y(u) - z_d + t\mathcal{C}A^{-1}Bw\|^2_{\mathcal{H}} \ ,$$
$$= \|\mathcal{C}y(u)-z_d\|^2_{\mathcal{H}} + t^2\|\mathcal{C}A^{-1}Bw\|^2_{\mathcal{H}} + 2t\left(\mathcal{C}y(u)-z_d, \mathcal{C}A^{-1}Bw\right)_{\mathcal{H}} \ .$$

De même

$$(\mathcal{N}(u+tw), u+tw)_{\mathcal{U}} = (\mathcal{N}u,u)_{\mathcal{U}} + t^2(\mathcal{N}w,w)_{\mathcal{U}} + 2t(\mathcal{N}u,w)_{\mathcal{U}}$$

car $\mathcal{N}$ est symétrique. Finalement

$$\frac{J(u+tw)-J(u)}{t} = \frac{t}{2}\left[\|\mathcal{C}A^{-1}Bw\|^2_{\mathcal{H}} + (\mathcal{N}w,w)_{\mathcal{U}}\right] + \left(\mathcal{C}y(u)-z_d, \mathcal{C}A^{-1}Bw\right)_{\mathcal{H}} + (\mathcal{N}u,w)_{\mathcal{U}} \ ,$$

et par passage à la limite quand $t \to 0^+$ on obtient

$$\forall u, w \in \mathcal{U} \qquad J'(u).w = \left(\mathcal{C}y(u)-z_d, \mathcal{C}A^{-1}Bw\right)_{\mathcal{H}} + (\mathcal{N}u,w)_{\mathcal{U}} \ .$$

En prenant $w = v-u$ et en remarquant que $A^{-1}B(v-u) = y(v)-y(u)$ on a le résultat annoncé. $\square$

Finalement

Théorème 2.3.1 *$\bar{u}$ est contrôle optimal si et seulement si*

$$\forall v \in U_{ad} \qquad \nabla J(\bar{u}).(v-\bar{u}) = (\mathcal{C}y(\bar{u}) - z_d, \mathcal{C}(y(v) - y(\bar{u})))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{N}\bar{u}, v-\bar{u})_{\mathcal{U}} \geq 0 \quad (2.3.16)$$

□

Nous allons transformer l'inéquation précédente pour la rendre plus facilement "exploitable". On va commencer par un exemple "standard".

2.3.1 Cas d'un contrôle distribué et du problème de Dirichlet

On choisit $V = H_o^1(\Omega)$ et $H = L^2(\Omega)$ (on rappelle que $V' = H^{-1}(\Omega)$). La forme bilinéaire est donnée par (2.1.8) :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\varphi,\psi) = \displaystyle\int_\Omega \left[\sum_{ij} a_{ij}(x)\partial_i\varphi(x)\ \partial_j\psi(x) \right]\ dx + \int_\Omega a_o(x)\ \varphi(x)\psi(x)\ dx\ , \\ \qquad\qquad\qquad \text{avec } a_{ij}, a_o \in L^\infty(\Omega) \text{ telles que} \\ \exists \alpha > 0\ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \displaystyle\sum_{ij} a_{ij}\xi_i\xi_i \geq \alpha(\sum_i \xi_i^2) \text{ et } a_o(x) \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega\ . \end{array} \right.$$

L'opérateur A associé est l'opérateur elliptique du deuxième ordre :

$$A\varphi = -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) + a_o\varphi\ ,$$

Pour simplifier la présentation on va prendre $A = -\Delta$.

On choisit $\mathcal{U} = H = L^2(\Omega)$ et $f \in H$. Le contrôle est dit **distribué** car il agit dans tout le domaine Ω. On prend également

$\mathcal{N} = \alpha\, Id$ (où $\alpha > 0$), $B = Id$, $\mathcal{C}$ est l'injection canonique de V dans $H \equiv \mathcal{H}$ et $z_d \in H$;

ainsi la fonctionnelle coût est

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega (y(x,v) - z_d(x))^2\, dx + \frac{\alpha}{2}\int_\Omega v^2(x)\, dx\ ,$$

où $y(\cdot, v)$ est l'état du système associé au contrôle v donné par

$$-\Delta\, y(v) = f + v \quad (\in L^2(\Omega)), \quad y \in H_o^1(\Omega)\ .$$

Le problème

$$\min J(v)\ ,\ v \in U_{ad}\ ,$$

admet une solution unique $\bar{u}$ et d'après le Théorème (2.3.1), $\bar{u}$ est contrôle optimal si et seulement si

$$\forall v \in U_{ad} \ \ \nabla J(\bar{u}).(v-\bar{u}) = \int_\Omega (\bar{y} - z_d)(y(v) - \bar{y})\, dx + \alpha\int_\Omega \bar{u}\,(v-\bar{u})\, dx \geq 0\ , \quad (2.3.17)$$

$\bar{y}$ désignant l'état $y(\bar{u})$ associé à $\bar{u}$.
On définit **l'état adjoint** $\bar{p}$ comme étant la solution du problème adjoint suivant :

$$A^* \bar{p} = z_d - \bar{y} \ \ (\in L^2(\Omega)), \ \ \bar{p} \in H^1_o(\Omega) \ , \tag{2.3.18}$$

où A^* désigne l'opérateur adjoint de A. Notons que ce problème admet une solution unique. D'autre part, dans notre cas A est un opérateur autoadjoint. Grâce à cette définition, on obtient

$$\int_\Omega (\bar{y} - z_d)(y(v) - \bar{y})\, dx = \int_\Omega \Delta\bar{p}\ (y(v) - \bar{y})\, dx \ .$$

On peut alors appliquer la formule de Green (intégration par parties). En effet $\bar{p}$, $\bar{y}$ et $y(v)$ sont dans $H^1_o(\Omega)$. On a donc

$$\int_\Omega \Delta\bar{p}\ [y(v) - \bar{y}]\, dx = -\int_\Omega \nabla\bar{p}\,\nabla(y(v) - \bar{y})\, dx = \int_\Omega \bar{p}\,[\Delta\,(y(v) - \bar{y})]\, dx \ .$$

Remarquons qu'on n'a pas de termes de bord car les fonctions envisagées sont dans $H^1_o(\Omega)$. Si les fonctions étaient dans $H^1(\Omega)$ il faudrait définir "proprement" (c'est-à-dire par densité) les traces des fonctions de $H^1(\Omega)$ sur le bord de Ω ainsi que la dérivée normale de ces fonctions.
Finalement, il vient, pour tout $v \in U_{ad}$

$$\int_\Omega (-\bar{p})\,[-\Delta(y(v) - \bar{y})]\, dx + \alpha \int_\Omega \bar{u}\,(v - \bar{u})\, dx \geq 0 \ ,$$

c'est-à-dire avec l'équation d'état

$$\int_\Omega (\alpha\bar{u} - \bar{p})\,(v - \bar{u})\, dx \geq 0 \ . \tag{2.3.19}$$

La solution du problème de contrôle optimal est donc caractérisée par le système suivant, dit **système d'optimalité du premier ordre** .

$$\begin{cases} -\Delta\,\bar{y} = \bar{u} \text{ dans } \Omega,\ \bar{y} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ -\Delta\,\bar{p} = z_d - \bar{y} \text{ dans } \Omega,\ \bar{p} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ (\alpha\bar{u} - \bar{p}, v - \bar{u})_{L^2(\Omega)} \geq 0, \quad \forall v \in U_{ad} \end{cases} \tag{2.3.20}$$

Remarque 2.3.1 *L'inéquation (2.3.19) est en réalité l'expression d'une projection sur U_{ad} et peut s'écrire comme une équation via l'opérateur de projection $\pi_{U_{ad}}$ de $L^2(\Omega)$ sur U_{ad}. En effet*

$$(\alpha\bar{u} - \bar{p}, v - \bar{u})_{L^2(\Omega)} \geq 0, \quad \forall v \in U_{ad}$$

s'écrit

$$\left(\bar{u} - \frac{\bar{p}}{\alpha}, v - \bar{u}\right)_{L^2(\Omega)} \geq 0, \quad \forall v \in U_{ad}$$

c'est-à-dire

$$\bar{u} = \pi_{U_{ad}}(\frac{\bar{p}}{\alpha}) \ .$$

2.3.2 Cas général

Nous allons maintenant passer au cas général (plus abstrait). Soit toujours $\bar{u}$ la solution (unique) du problème de contrôle optimal et $\bar{y} = y(\bar{u})$ l'état associé. Nous savons que

$$\forall v \in U_{ad} \qquad (\mathcal{C}\bar{y} - z_d, \mathcal{C}[y(v) - y(\bar{u})])_{\mathcal{H}} + (\mathcal{N}\bar{u}, v - \bar{u})_{\mathcal{U}} \geq 0 \ ,$$

c'est-à-dire avec l'équation d'état et le fait que A est un isomorphisme de V dans V'

$$\forall v \in U_{ad} \qquad \big(\mathcal{C}\bar{y} - z_d, \mathcal{C}A^{-1}B(v - \bar{u})\big)_{\mathcal{H}} + (\mathcal{N}\bar{u}, v - \bar{u})_{\mathcal{U}} \geq 0 \ . \tag{2.3.21}$$

Formellement, on a envie de prendre l'adjoint de $\mathcal{C}A^{-1}B$ (ce qu'on va effectivement faire). Faisons tout d'abord un bref rappel sur les opérateurs adjoints.

Considérons d'abord $\mathcal{C} : V \to \mathcal{H}$. Comme $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert, il est identifiable à son dual $\mathcal{H}'$: on note Λ l'isomorphisme canonique entre $\mathcal{H}$ et son dual. L'isomorphisme $\Lambda : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ vérifie donc :

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathcal{H}^2 \qquad (z_1, z_2)_{\mathcal{H}} = \langle z_1, \Lambda z_2 \rangle_{\mathcal{H},\mathcal{H}'} \text{ (crochet de dualité)} \ .$$

Par exemple, si $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ alors $\Lambda = Id_{L^2(\Omega)}$ mais ce n'est pas toujours le cas bien sûr. L'isomorhisme Λ entre $H^1_o(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$ est l'opérateur $-\Delta$. Dans ce cas, si $(z_1, z_2) \in H^1_o(\Omega) \times H^1_o(\Omega)$, nous avons

$$(z_1, z_2)_{\mathcal{H}} = \int_\Omega \nabla z_1 \nabla z_2 = \int_\Omega z_1(-\Delta z_2)\, dx \ ,$$

$$(z_1, z_2)_{\mathcal{H}} = \text{``}(z_1, -\Delta z_2)''_{L^2(\Omega)} = \langle z_1, -\Delta z_2 \rangle_{H^1_o, H^{-1}} \ ,$$

car $L^2(\Omega)$ est ici l'espace pivot H entre $V = H^1_o(\Omega)$ et V' et

$$\langle z, w \rangle_{V,V'} = (z, w)_H \ \text{ si } w \in H \ .$$

Soit $\mathcal{C}^*$ l'adjoint de $\mathcal{C}$. $\mathcal{C}^*$ est défini de $\mathcal{H}'$ dans V' et nous avons

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \forall \varphi \in V \qquad (z, \mathcal{C}\varphi)_{\mathcal{H}} = \langle \Lambda z, \mathcal{C}\varphi \rangle_{\mathcal{H}',\mathcal{H}} = \langle \mathcal{C}^*\Lambda z, \varphi \rangle_{V',V} \ .$$

Appliquons cette relation à (2.3.21) : il vient

$$\forall v \in U_{ad} \qquad \big\langle \mathcal{C}^*\Lambda(\mathcal{C}\bar{y} - z_d), A^{-1}B(v - \bar{u}) \big\rangle_{V',V} + (\mathcal{N}\bar{u}, v - \bar{u})_{\mathcal{U}} \geq 0 \ . \tag{2.3.22}$$

On définit alors **l'état adjoint** $\bar{p}$ par

$$A^*\bar{p} = \mathcal{C}^*\Lambda(z_d - \mathcal{C}\bar{y}) \ , \tag{2.3.23}$$

où A^* est l'adjoint de A. Rappelons que A est défini de V dans V' et A^* de V dans V' également (car V est réflexif) et que

$$\forall(\varphi,\psi)\in V\times V \qquad \langle A^*\varphi,\psi\rangle_{V',V}=\langle\varphi,A\psi\rangle_{V,V'}=a(\varphi,\psi)\ .$$

A^* est aussi un isomorphisme de V sur V' de sorte que l'état adjoint est défini de manière unique. On obtient alors

$$\forall v\in U_{ad} \qquad \left\langle -A^*\bar p, A^{-1}B(v-\bar u)\right\rangle_{V',V}+(\mathcal N\bar u, v-\bar u)_{\mathcal U}\geq 0\ ,$$

et donc

$$\forall v\in U_{ad} \qquad -\langle\bar p, B(v-\bar u)\rangle_{V,V'}+(\mathcal N\bar u, v-\bar u)_{\mathcal U}\geq 0\ .$$

De la même façon, soit $\Lambda_{\mathcal U}$ l'isomorphisme canonique entre $\mathcal U$ et $\mathcal U'$ et $B^*: V\to\mathcal U'$ l'opérateur adjoint de B. On obtient

$$\forall v\in\mathcal U,\ \forall y\in V \qquad \langle y,Bv\rangle_{V,V'}=\langle B^*y,v\rangle_{\mathcal U',\mathcal U}=\left(\Lambda_{\mathcal U}^{-1}B^*y,v\right)_{\mathcal U}\ .$$

Finalement, nous avons

$$\forall v\in U_{ad} \qquad \left(\mathcal N\bar u-\Lambda_{\mathcal U}^{-1}B^*\bar p, v-\bar u\right)_{\mathcal U}\geq 0\ . \tag{2.3.24}$$

Nous obtenons donc le résultat "abstrait" suivant

Théorème 2.3.2 *Soit A un opérateur associé à une forme bilinéaire vérifiant les hypothèses du Théorème 2.1.4. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar u$ soit contrôle optimal est que les (in)équations suivantes soient vérifiées:*

$$A\,\bar y=f+B\,\bar u, \tag{2.3.25a}$$

$$A^*\,\bar p=\mathcal C^*\Lambda\,(z_d-\mathcal C\bar y)\ , \tag{2.3.25b}$$

$$\bar u\in U_{ad}\ \textit{et}\ \left(\mathcal N\bar u-\Lambda_{\mathcal U}^{-1}B^*\bar p, v-\bar u\right)_{\mathcal U}\geq 0\ ,\quad \forall v\in U_{ad}\ . \tag{2.3.25c}$$

*Ces relations forment un **système d'optimalité** du premier ordre.*

Ce système d'optimalité est tout-à-fait analogue au système obtenu dans le chapitre précédent (Théorème 1.2.10).

2.3.3 Quelques exemples de contraintes sur le contrôle

Cas sans contraintes

Nous examinons ici le cas où $U_{ad} = \mathcal{U}$. La condition (2.3.25c) donne alors

$$\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^* \bar{p} - \mathcal{N} \bar{u} = 0 \ .$$

On peut donc calculer le contrôle optimal en résolvant le système d'EDPs linéaires couplées suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} A\,\bar{y} - B\,\mathcal{N}^{-1} \Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^* \bar{p} = f \ , \\ A^*\,\bar{p} + \mathcal{C}^* \Lambda \bar{y} = \mathcal{C}^* \Lambda z_d \ , \end{array} \right.$$

et en posant $\bar{u} = \mathcal{N}^{-1} \Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^* \bar{p}$.

Dans le cas du problème de Dirichlet homogène on obtient précisément

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta\,\bar{y} - \dfrac{\bar{p}}{\alpha} = f \ , \\ -\Delta\,\bar{p} + \bar{y} = z_d \ , \end{array} \right.$$

et $\bar{u} = \dfrac{\bar{p}}{\alpha}$. Remarquons qu'on a un résultat supplémentaire de régularité dans ce cas là. En effet, comme f et $\bar{u}$ sont dans $L^2(\Omega)$ alors $\bar{y} \in H^2(\Omega) \cap H_o^1(\Omega)$. De même $\bar{p} \in H^2(\Omega) \cap H_o^1(\Omega)$. Par conséquent $\bar{u} \in H^2(\Omega)$.

On peut ainsi, au cas par cas obtenir des résulats de régularité sur le contrôle.

Cas où U_{ad} est un cône positif

Nous nous plaçons dans le cas d'un problème de contrôle gouverné par une équation de Dirichlet homogène de sorte que le système d'optimalité est de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} A\,\bar{y} = \bar{u} \text{ dans } \Omega, \ \bar{y} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ A^*\,\bar{p} = z_d - \bar{y} \text{ dans } \Omega, \ \bar{p} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ (\alpha\bar{u} - \bar{p}, v - \bar{u})_{L^2(\Omega)} \geq 0, \quad \forall v \in U_{ad} \end{array} \right.$$

On suppose que

$$U_{ad} = \{\, v \in L^2(\Omega) \ \mid \ v \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega \,\} \ .$$

Soit $\varphi \in L^2(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ et posons $v = \bar{u} + \varphi$. La troisième inéquation du système d'optimalité devient

$$\forall \varphi \geq 0 \qquad \int_\Omega (\alpha\bar{u} - \bar{p})\,\varphi\,dx \geq 0 \ ,$$

et par conséquent $\alpha\bar{u} - \bar{p} \geq 0$ p.p. dans Ω.

Prenons successivement $v = 2\bar{u} \geq 0$ et $v = 0$ dans la troisième inéquation du système d'optimalité : nous obtenons

$$\int_\Omega (\alpha\bar{u} - \bar{p})\,\bar{u}\,dx = 0 \ .$$

Comme $(\alpha\bar{u} - \bar{p})\,\bar{u}$ est une fonction positive presque partout cela implique que

$$(\alpha\bar{u} - \bar{p})(x)\,\bar{u}(x) = 0 \text{ presque partout dans } \Omega\ .$$

Cette relation est une relation de **complémentarité**. Nous allons préciser encore : posons

$$\Omega_o = \{\ x \in \Omega\ \mid\ \bar{u}(x) = 0\ \} \text{ et } \Omega_+ = \{\ x \in \Omega\ \mid\ \bar{u}(x) > 0\ \}\ .$$

Il est clair que $\Omega = \Omega_o \cup \Omega_+$ à un ensemble de mesure nulle près.
Sur Ω_+, $\bar{u} > 0$ et donc $\alpha\bar{u} - \bar{p} = 0$. On obtient donc $\bar{u} = \dfrac{\bar{p}}{\alpha}$ et plus généralement

$$\bar{u} = \frac{1}{\alpha}\sup(0, \bar{p})\ .$$

En effet sur Ω_o, $\bar{u} = 0$ et donc $\bar{p} \leq 0$. Sur Ω_+, $\bar{p} = \alpha\bar{u} > 0$. Finalement le contrôle optimal est obtenu en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} A\bar{y} - \dfrac{1}{\alpha}\sup(0, \bar{p}) = f\ , & \bar{y} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\ , \\ A^*\bar{p} + \bar{y} = z_d\ , & \bar{p} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\ , \\ \bar{u} = \dfrac{1}{\alpha}\sup(0, \bar{p}) & \end{cases}$$

On pourra traiter à titre d'exercice le cas où

$$U_{ad} = \{\ v \in L^2(\Omega)\ \mid\ \xi_o \leq v \leq \xi_1 \text{ p.p. dans } \Omega\ \}\ ,$$

où ξ_o, ξ_1 sont donnés dans $L^\infty(\Omega)$

2.3.4 Cas d'un système gouverné par un problème de Neumann

Nous nous placons maintenant dans la cas où $V = H^1(\Omega)$ et $H = L^2(\Omega)$. On choisit la forme bilinéaire a comme dans le théorème de Lax-Milgram. Par conséquent

$$\forall L \in V',\ \exists! y \in V \qquad a(y, \varphi) = L(\varphi), \qquad \forall \varphi \in V\ .$$

Prenons

$$\mathcal{U} = L^2(\Omega), \mathcal{H} = L^2(\Omega),\ B = I,\ \mathcal{C} \text{ injection canonique de } V \text{ dans } L^2(\Omega),$$

$$f \in L^2(\Omega) \text{ et } g \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\ .$$

La forme linéaire L est choisie comme suit

$$L(\varphi) = \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx + \int_\Gamma g(\gamma)\,\varphi(\gamma)\,d\gamma\ .$$

Cette définition a bien un sens car toute fonction φ de $H^1(\Omega)$ possède une trace au bord qui appartient (quasiment par définition) à l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dont le dual est précisément $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Le terme $\displaystyle\int_\Gamma g(\gamma)\,\varphi(\gamma)\,d\gamma$. est en fait $\langle g\,,\,\varphi_\Gamma\rangle_{H^{-\frac{1}{2}},H^{\frac{1}{2}}}$. L'équation d'état est alors

$$\forall\varphi\in H^1(\Omega) \qquad a(y,\varphi)=L(\varphi)+\int_\Omega u(x)\,\varphi(x)\,dx\ ,$$

ce qui s'interprète

$$\left\{\begin{array}{ll} A\,y=f+u & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial y}{\partial \nu_A}=g & \text{sur } \Gamma\ . \end{array}\right.$$

C'est un problème de **Neumann** . La dérivée normale par rapport à A a été définie précédemment. Nous avons toujours un contrôle distribué et nous gardons la même fonctionnelle coût J. Appliquons le théorème général 2.3.2.

- $\Lambda_{\mathcal{U}}=Id_{L^2(\Omega)}$ et $\Lambda=Id_{L^2(\Omega)}$.
- Comme $\mathcal{C}$ est l'injection canonique de $V=H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, l'adjoint $\mathcal{C}^*$ est l'injection canonique de $L^2(\Omega)$ dans V' (qui n'est pas $H^{-1}(\Omega)$!!). Par conséquent , $\mathcal{C}^*\Lambda\mathcal{C}=\mathcal{C}^*\mathcal{C}:V\to V'$ est l'injection canonique de V dans V'

La relation (2.3.25b) donne : $A^*\,\bar p=z_d-\bar y$ (a priori dans V' mais en réalité dans $L^2(\Omega)$ si on choisit $z_d\in L^2(\Omega)$). Interprétons cette relation :

$$\forall\varphi\in V \qquad \langle A^*\,\bar p\,,\,\varphi\rangle_{V',V}=\langle z_d-\bar y\,,\,\varphi\rangle_{V',V}=(z_d-\bar y\,,\,\varphi)_H\ .$$

Donc

$$\langle A^*\,\bar p\,,\,\varphi\rangle_{V',V}=\int_\Omega (z_d-\bar y)(x)\,\varphi(x)/,dx\ ,$$

et il n'y pas de terme de bord : donc $\dfrac{\partial \bar p}{\partial \nu_{A^*}}=0$ sur Γ. On obtient finalement la carctérisation suivante : $\bar u$ est contrôle optimal si et seulement si

$$A\,\bar y=f+\,\bar u \text{ dans } \Omega\ ,\ \frac{\partial \bar y}{\partial \nu_A}=g \text{ sur } \Gamma\ . \tag{2.3.26a}$$

$$A^*\,\bar p=z_d-\bar y\ \text{ dans } \Omega\ ,\ \frac{\partial \bar p}{\partial \nu_{A^*}}=0 \text{ sur } \Gamma\ . \tag{2.3.26b}$$

$$\bar u\in U_{ad} \text{ et } \int_\Omega (\alpha\,\bar u-\bar p)\,(v-\bar u)\ dx\geq 0\ ,\ \ \forall v\in U_{ad}\ . \tag{2.3.26c}$$

On peut retrouver ce résultat par un calcul direct avec la formule de Green.

Pour être complet il faudrait étudier le cas de contrôles frontières qui est le cas de loin le plus réaliste en pratique. Nous ne le ferons pas car cette étude nécessite la mise en place d'outils d'analyse fonctionnelle élaborés. Il faut en effet introduire les espaces et les opérateurs de trace pour définir correctement les problèmes. Le lecteur intéressé pourra consulter [Li].

2.4 Interprétation Lagrangienne

Dans tout ce qui suit on prendra l'exemple d'un problème de contrôle distribué pour un système décrit par un problème de Dirichlet homogène. Plus précisément : Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, n ≤ 3, de frontière (régulière) Γ et on étudie le problème

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \min \quad J(y,u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega (y-z_d)^2\, dx + \dfrac{\alpha}{2}\int_\Omega u^2\, dx \ , \\ -\Delta\, y = f + u \text{ dans } \Omega \ , \quad y = 0 \quad \text{sur } \Gamma \ , \\ u \in U_{ad} \end{cases}$$

avec $f,\ z_d \in L^2(\Omega),\ u \in L^2(\Omega)$ et $\alpha > 0$ (ou U_{ad} est borné dans $L^2(\Omega)$). Remarquons que y a une propriété de régularité supplémentaire car $f+u \in L^2(\Omega)$ et $-\Delta$ est un isomorphisme de $\mathcal{X} \overset{def}{\equiv} H^2(\Omega) \cap H^1_o(\Omega)$ sur $L^2(\Omega)$. Par conséquent $\mathcal{X}$ qui est l'espace d'état "naturel". Rappelons aussi que lorsque $n \leq 3$, alors $\mathcal{X} \subset \mathcal{C}_o(\overline{\Omega})$.
On a vu que si $\bar u$ est solution, une CNS est

$$(\mathcal{S}) \qquad \begin{cases} -\Delta\, \bar y = \bar u \text{ dans } \Omega,\ \bar y = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ -\Delta\, \bar p = z_d - \bar y \text{ dans } \Omega,\ \bar p = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ (\alpha \bar u - \bar p, v - \bar u)_{L^2(\Omega)} \geq 0, \quad \forall v \in U_{ad} \end{cases}$$

C'est une condition nécessaire et suffisante car nous sommes dans le cadre **convexe**: J est convexe et les contraintes sont affines. Nous allons interpréter le système $(\mathcal{S})$ en termes de Lagrangien.

On définit le **Lagrangien** du problème sur $\mathcal{X} \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ par

$$\mathcal{L}(y,v,q) = J(y,v) + (\,p\,,\, -\Delta\, y - f - v)_{L^2(\Omega)} \ ;$$

c'est en fait un Lagrangien "partiel" car on n'a pas inclus les contraintes sur v.
$\mathcal{L}$ est convexe en (y,v) et linéaire en q. D'autre part c'est une fonction $\mathcal{C}^1$ et on a pour tous $(z,v) \in \mathcal{X} \times L^2(\Omega)$

$$\nabla_{(y,v)}\mathcal{L}(\bar y, \bar u, q)(z,v) = (\,\bar y - z_d\,,\, z)_{L^2(\Omega)} + \alpha\ (\,\bar u\,,\, v)_{L^2(\Omega)} + (\,q\,,\, -\Delta z - v)_{L^2(\Omega)}$$

c'est-à-dire avec $(\mathcal{S})$

$$\nabla_{(y,v)}\mathcal{L}(\bar y, \bar u, q)(z,v) = (\,\Delta \bar p\,,\, z)_{L^2(\Omega)} + (\,q\,,\, -\Delta z)_{L^2(\Omega)} + (\,\alpha\, \bar u - q\,,\, v)_{L^2(\Omega)}$$

$$\nabla_{(y,v)}\mathcal{L}(\bar y, \bar u, q)(z,v) = (\,-\bar p + q\,,\, -\Delta z)_{L^2(\Omega)} + (\,\alpha\, \bar u - q\,,\, v)_{L^2(\Omega)}\,.$$

En particulier

$$\nabla_{(y,v)}\mathcal{L}(\bar y, \bar u, \bar p)(z,v) = (\,\alpha\, \bar u - \bar p\,,\, v)_{L^2(\Omega)}$$

et donc

$$\forall (z,v) \in \mathcal{X} \times U_{ad} \qquad \nabla_{(y,v)}\mathcal{L}(\bar y, \bar u, \bar p)(z-\bar y, v-\bar u) = (\,\alpha\,\bar u - \bar p\,,\, v-\bar u)_{L^2(\Omega)} \tag{2.4.27}$$

Comme $\mathcal{L}(\cdot,\cdot,\bar p)$ est convexe, cela signifie qu'il atteint son minimum en $(\bar y, \bar u)$:

$$\forall (z,v) \in \mathcal{X} \times U_{ad} \qquad \mathcal{L}(\bar y, \bar u, \bar p) \le \mathcal{L}(z,v,\bar p)\ . \tag{2.4.28}$$

De même, pour tout $q \in L^2(\Omega)$

$$\mathcal{L}(\bar y, \bar u, q) = J(\bar y, \bar u) + (\,q\,,\,-\Delta\,\bar y - f - \bar u)_{L^2(\Omega)} = J(\bar y, \bar u) = \mathcal{L}(\bar y, \bar u, \bar p)\ .$$

Finalement

$$\forall (z,v,q) \in \mathcal{X} \times U_{ad} \times L^2(\Omega) \qquad \mathcal{L}(\bar y, \bar u, \bar p) \underbrace{\le}_{a} \mathcal{L}(\bar y, \bar u, \bar p) \underbrace{\le}_{b} \mathcal{L}(z,v,\bar p)\ . \tag{2.4.29}$$

Le triplet $(\bar y, \bar u, \bar p)$ est un **point-selle** de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{X} \times U_{ad} \times L^2(\Omega)$. L'état adjoint $\bar p$ est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte :$-\Delta y = f + v$.
Réciproquement.- Supposons que $(\bar y, \bar u, \bar p)$ est un **point-selle** de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{X} \times U_{ad} \times L^2(\Omega)$. Donc $(\bar y, \bar u, \bar p) \in \mathcal{X} \times U_{ad} \times L^2(\Omega)$ et la relation (2.4.29) est vérifiée : La condition (a) est équivalente à

$$J(\bar y, \bar u) + (\,q\,,\,-\Delta\,\bar y - f - \bar u)_{L^2(\Omega)} \le J(\bar y, \bar u) + (\,\bar p\,,\,-\Delta\,\bar y - f - \bar u)_{L^2(\Omega)} \qquad \forall q \in L^2(\Omega)\ ,$$

c'est-à-dire

$$(\,q - \bar p\,,\,-\Delta\,\bar y - f - \bar u)_{L^2(\Omega)} \le 0 \qquad \forall q \in L^2(\Omega)\ .$$

Donc $-\Delta\,\bar y = f + \bar u$ avec $\bar y \in \mathcal{X}$ et $\bar u \in U_{ad}$ (l'équation d'état est satisfaite : relation de **réalisabilité**).
La condition (b) donne en particulier pour tous $(z,v) \in \mathcal{X} \times U_{ad}$ tels que $-\Delta z = v + f$

$$J(\bar y, \bar u) + (\,\bar p\,,\,-\Delta\,\bar y - f - \bar u)_{L^2(\Omega)} = J(\bar y, \bar u) \le J(z,v) + \left(\bar p\,,\,\underbrace{-\Delta\,z - f - v}_{=0}\right)_{L^2(\Omega)} = J(z,v)\ .$$

Par conséquent $(\bar y, \bar u)$ est solution de $(\mathcal{P})$. Finalement, nous pouvons résumer la situation dans le théorème suivant :

Théorème 2.4.1 *Soit $(\bar y, \bar u) \in \mathcal{X} \times U_{ad}$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes*
(1) $(\bar y, \bar u)$ est solution de $(\mathcal{P})$
(2) On peut trouver $\bar p \in H^1_o(\Omega)$ tel que $(\bar y, \bar u, \bar p)$ est solution de $(\mathcal{S})$.
(3) On peut trouver $\bar p \in H^1_o(\Omega)$ tel que $(\bar y, \bar u, \bar p)$ est point-selle du Lagrangien $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{X} \times U_{ad} \times L^2(\Omega)$.

Nous sommes donc ramenés (comme au chapitre précédent) à la recherche de points-selles pour laquelle il existe des algorithmes spécifiques que nous développerons plus tard. Remarquons que la contrainte sur le contrôle $v \in U_{ad}$ est gardée en l'état. Nous allons maintenant étudier l'éventuel multiplicateur associé à cette contrainte.

2.5 Conditions d'optimalité incluant toutes les contraintes

Nous avons vu que l'état adjoint est un multiplicateur de Lagrange associé à l'équation d'état : $-\Delta y - f - v = 0$. Lorsque $y \in H^1_o$ la quantité $-\Delta y - f - v$ "vit" dans l'espace $H^{-1}(\Omega)$ et $\bar{p} \in H^1_o(\Omega)$ l'espace dual. En ce sens $\bar{p}$ est un variable duale (obtenue par intégration par parties, c'est-à-dire par dualité). Nous allons essayer d'exhiber la variable duale de la contrainte $v \in U_{ad}$. Pour l'instant nous ne particulariserons pas U_{ad} et nous allons considérer le cas général. Nous devons au préalable introduire quelques notions de base d'analyse convexe non lisse.

2.5.1 Sous-différentiel

Dans ce qui suit $\mathcal{X}$ est un espace de banach de dual $\mathcal{X}'$.

Définition 2.5.1 *Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $a \in dom\ f$ (i.e. $f(a) < +\infty$). Le sous-différentiel de f en a est l'ensemble $\partial f(a)$ (éventuellement vide) des $d \in \mathcal{X}'$ tels que*

$$f(x) \geq f(a) + \langle d, x - a\rangle_{\mathcal{X}',\mathcal{X}} \ .$$

Remarque 2.5.1 • *$f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ atteint son minimum en $a \in dom\ f$ si et seulement si*

$$0 \in \partial f(a).$$

• *Si $f, g : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $a \in dom\ f \cap dom\ g$, on a*

$$\partial f(a) + \partial g(a) \subset \partial(f + g)(a) \ .$$

• *Comme*

$$\partial f(a) = \bigcap_{x\in\mathcal{X}} \{\, d \in \mathcal{X}' \ \mid\ \langle d, x - a\rangle_{\mathcal{X}',\mathcal{X}} \leq f(x) - f(a)\ \} \ ,$$

$\partial f(a)$ est un sous-ensemble convexe, fermé pour la topologie $\sigma(\mathcal{X}', \mathcal{X})$ comme intersection de convexes fermés.

• *Pour tout $\lambda > 0$ on a $\partial(\lambda f)(a) = \lambda\partial f(a)$.*

Dans le cas où f est la fonction indicatrice d'un sous-ensemble non vide K de $\mathcal{X}$:

$$f(x) \stackrel{def}{=} 1_K(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in K \ , \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \ ,$$

le sous-différentiel de f est le **cône normal** de K en a :

$$\partial 1_K(a) = N_K(a) = \{ \ d \in \mathcal{X}' \ \mid \ \langle d, x-a \rangle_{\mathcal{X}',\mathcal{X}} \leq 0 \text{ pour tout } x \in K \ \} \ .$$

Enfin la démonstration du résultat suivant est laissée en exercice :

Théorème 2.5.1 *Si $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est Gâteaux-différentiable en $a \in dom\ f$, alors*

$$\partial f(a) = \{f'(a)\} \ .$$

□

Pour plus de détails sur ces notions là on peut consulter [Azé]. Nous terminons par un exemple important.

Cas des contraintes de bornes dans $L^2(\Omega)$

On choisit $\mathcal{X} = L^2(\Omega)$ et K un sous-ensemble fermé, convexe non vide de $L^2(\Omega)$ Nous allons préciser le sous-différentiel de 1_K en u (c'est-à-dire le cône normal à K en u):

Proposition 2.5.1 *Soit $u \in K$. Alors*

$$\lambda \in \partial 1_K(u) \Longleftrightarrow \lambda = c\,[u + \frac{\lambda}{c} - \Pi_K(u + \frac{\lambda}{c})]$$

pour tout c réel strictement positif, où Π_K est la projection de $L^2(\Omega)$ sur le convexe K.
Dans le cas où

$$K = \{ \ v \in L^2(\Omega) \ \mid \ a(x) \leq v(x) \leq b(x) \ p.p. \ dans\ \Omega \ \} \ ,$$

où a et b sont des éléments de $L^\infty(\Omega)$ par exemple, on a

$$\lambda \in \partial 1_K(u) \Longleftrightarrow \lambda(x) = c \min \left[\max\left(0, u(x) + \frac{\lambda(x)}{c} - b(x)\right), u(x) + \frac{\lambda(x)}{c} - a(x) \right] \ p.p. \ dans\ \Omega \ .$$

Démonstration - Remarquons tout d'abord que $\partial 1_K(u)$ est un sous-ensemble de $L^2(\Omega)$. On rappelle également que si Π_K est la projection de $L^2(\Omega)$ sur le convexe fermé K, l'image $\Pi_K(w)$ d'un élément quelconque de $L^2(\Omega)$ est caractérisée par

$$\forall v \in K \qquad (w - \Pi_K(w), v - \Pi_K(w))_{L^2(\Omega)} \leq 0 \ .$$

Soit $\lambda \in \partial 1_K(u)$: λ est caractérisé par

$$\forall v \in K \qquad (\lambda, v-u)_{L^2(\Omega)} \leq 0$$

c'est-à-dire, pour tout $c > 0$

$$\forall v \in K \qquad \left(u + \frac{\lambda}{c} - u\,, v-u\right)_{L^2(\Omega)} \leq 0\ .$$

D'après ce qui précède (en posant $w = u + \dfrac{\lambda}{c}$)

$$\lambda \in \partial 1_K(u) \Longleftrightarrow u = \Pi_K(u + \frac{\lambda}{c}) \Longleftrightarrow \lambda = c\,[u + \frac{\lambda}{c} - \Pi_K(u + \frac{\lambda}{c})]\ .$$

Dans le cas où

$$K = \{\ v \in L^2(\Omega)\ \mid\ a(x) \leq v(x) \leq b(x) \text{ p.p. dans } \Omega\ \}\ ,$$

calculons l'expression de la projection Π_K. Elle "coïncide" avec la projection presque partout:

$$\Pi_K v(x) = \begin{cases} v(x) & \text{si} \quad a(x) \leq v(x) \leq b(x) \\ a(x) & \text{si} \quad v(x) < a(x) \\ b(x) & \text{si} \quad v(x) > b(x) \end{cases} = \min\{(\max\,[a(x), v(x)]), b(x)\} \text{ p.p. dans } \Omega\ .$$

par conséquent

$$u(x) = \begin{cases} b(x) & \text{si} \quad u(x) + \dfrac{\lambda(x)}{c} \geq b(x) \\ a(x) & \text{si} \quad u(x) + \dfrac{\lambda(x)}{c} \leq a(x) \\ u(x) + \dfrac{\lambda(x)}{c} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On obtient donc

$$\lambda(x) \begin{cases} \geq 0 & \text{si} \quad u(x) + \dfrac{\lambda(x)}{c} \geq b(x) \quad \text{et alors } u(x) = b(x) \\ \leq 0 & \text{si} \quad u(x) + \dfrac{\lambda(x)}{c} \leq a(x) \quad \text{et alors } u(x) = a(x) \\ = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

ce qui donne avec la relation $\lambda = c\,[u + \dfrac{\lambda}{c} - \Pi_K(u + \dfrac{\lambda}{c})]$

$$\lambda(x) \begin{cases} \geq 0 & \text{si} \quad u(x) + \dfrac{\lambda(x)}{c} \geq b(x) \quad \text{et alors } \lambda(x) = c[u(x) + \dfrac{\lambda(x)}{c} - b(x)] \\ \leq 0 & \text{si} \quad u(x) + \dfrac{\lambda(x)}{c} \leq a(x) \quad \text{et alors } \lambda(x) = c[u(x) + \dfrac{\lambda(x)}{c} - a(x)] \\ = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Finalement, on vérifie bien que

$$\lambda(x) = c \min \left[\max \left(0, u(x) + \frac{\lambda(x)}{c} - b(x) \right), u(x) + \frac{\lambda(x)}{c} - a(x) \right] \text{ p.p. dans } \Omega \; .$$

2.5.2 Le système d'optimalité revisité

Nous sommes en mesure de réécrire le système d'optimalité $(\mathcal{S})$ en faisant intervenir le multiplicateur de Lagrange $\bar{\lambda} \in L^2(\Omega)$ associé à la contrainte sur le contrôle . En effet si on pose

$$\alpha \bar{u} = \bar{p} - \bar{\lambda} \; ,$$

la relation

$$(\alpha \bar{u} - \bar{p}, v - \bar{u})_{L^2(\Omega)} \geq 0, \quad \forall v \in U_{ad}$$

signifie que

$$\bar{\lambda} \in \partial 1_{U_{ad}}(\bar{u}) \; .$$

On obtient donc le système d'optimalité suivant :

$$(\mathcal{S}) \qquad \begin{cases} -\Delta\, \bar{y} = \bar{u} & \text{dans } \Omega, \quad \bar{y} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ -\Delta\, \bar{p} = z_d - \bar{y} & \text{dans } \Omega, \quad \bar{p} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \alpha \bar{u} = \bar{p} - \bar{\lambda}, & \bar{\lambda} \in L^2(\Omega) \\ \bar{\lambda} \in \partial 1_{U_{ad}}(\bar{u}) & \end{cases}$$

Il est important de savoir décrire $\partial 1_{U_{ad}}(\bar{u})$ pour pouvoir mettre en place des algorithmes de résolution d'un tel système.

Table des matières

Bibliographie

[Azé] **D. Azé**, *Eléments d'analyse convexe variationnelle* , Mathématiques 2ème cycle, Ellipses, 1997.

[BGLS] **J.F. Bonnans- J.C. Gilbert - C. Lemaréchal - C. Sagastizabal**, *Optimisation numérique. Aspects théoriques et pratiques* , Collection Mathématiques et Applications, Vol. 27, Springer-verlag, 1998.

[Br] **H. Brezis**, *Analyse fonctionnelle*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, Masson,1987.

[Ca] **H. Cartan**, *Cours de calcul différentiel* , Hermann, Paris, 1977.

[Ci] **P.G. Ciarlet**, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson, Paris, 1988.

[CM] **M.Crouzeix - A.Mignot**, *Analyse Numérique des équations Différentielles*, Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson, Paris, 1989.

[DL] **Dautray R.Lions J.L.**, *Analyse mathématique et calcul numérique*, 9 volumes, Masson, Paris, 1987.

[ET] **I.Ekeland - R.Temam**, *Analyse Convexe et Problèmes Variationnels*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[FG] **M. Fortin - R. Glowinski**, *Méthodes de Lagrangien Augmenté. Application à la résolution de problèmes aux limites*, Dunod-Bordas, Paris, 1982.

[Li] **Lions J.L.**, *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris, 1968.

[LM] **Lions J.L.- Magenes E.**, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, 3 volumes, Dunod, Paris, 1968.

[Luen] **D.G. Luenberger**, *Optimization by Vector Space Methods*, Wiley, New York,1969.

[Fa] **P. Faurre**, *Analyse Numérique- Notes d'optimisation*, Collection X, Ellipses, Paris, 1988.

[Nem] **G.L. Nemhauser - A.H.G. Rinnooy Kan - M.J. Todd (eds)**, *Optimization*, Handbook in operations research and management science, Vol.1, North-Holland , 1989.

[RT] **P.A. Raviart-J.M. Thomas**, *Introduction à l'analyse numérique des EDP*, Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson, Paris,1988.

[Rei] **H. Reinhard**, *Equations différentielles, fondements et applications*, Dunod Université, Bordas, Paris,1989.