Université Badji Mokhtar, Annaba.
Faculté des sciences.
Département de mathématiques.

Master 1 : Contrôle optimal

Exercices contrôle optimal

Exercice 1

Dans le cours on a obtenu le système (2.3.20) des condtions d'optimlités, sous la forme

$$\begin{cases} -\Delta\overline{y} = \overline{u} - f \text{ dans } \Omega \text{ et } \overline{y} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ -\Delta\overline{p} = z_d - \overline{y} \text{ dans } \Omega \text{ et } p = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ (\alpha\overline{u} - \overline{p}, v - \overline{u})_{L^2(\Omega)} \geq 0,\ \forall v \in U_{ad} \end{cases}$$

Réecrire le système précédent dans la cas sans contraintes c'est-à-dire $U_{ad} \equiv L^2(\Omega)$

Solution 1

On sait que la troisième équation, peut être écrite sous la forme

$$\overline{u} = P_{U_{ad}}\left(\frac{\overline{p}}{\alpha}\right)$$

où $P_{U_{ad}}$ est l'opérateur de la projection orthogonale sur U_{ad}.

Dans le cas sans contrainte et d'aprés les propriètés de de l'opérateur de projection orthogonale, on sait que $u = \frac{p}{\alpha}$, par suite en replaçant dans le système (2.3.20), on déduit facilement le nouveau système donné ci-dessou

$$\begin{cases} -\Delta\overline{y} = \frac{\overline{p}}{\alpha} - f \text{ dans } \Omega \text{ et } \overline{y} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ -\Delta\overline{p} = z_d - \overline{y} \text{ dans } \Omega \text{ et } \overline{p} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

qui est un système réduit.

Exercice 2

On considére toujours le même système donné par (2.3.20), et on suppose que l'ensemble U_{ad} est un cône positif, c'est-à-dire U_{ad} est défini sous la forme

$$U_{ad} = \left\{v \in L^2(\Omega) \mid v \geq 0 \text{ presque partout dans } \Omega\right\}$$

Montrer que le système (2.3.20) peut être écrit sous la forme

$$\begin{cases} -\Delta\overline{y} - \frac{1}{\alpha}\sup(0,\overline{p}) = f \text{ dans } \Omega \text{ et } \overline{y} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ -\Delta\overline{p} = z_d - \overline{y} \text{ dans } \Omega \text{ et } \overline{p} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \overline{u} = \frac{1}{\alpha}\sup(0,\overline{p}) \end{cases}$$

Solution 2

Soit φ dans $L^2(\Omega)$ avec $\varphi \geq 0$ et posons $v = \overline{u} + \varphi$ dans la troisième équation du système (2.3.20). Par suite il vient

$$\forall\varphi \geq 0,\ \int_\Omega (\alpha\overline{u} - \overline{p})\,\varphi \geq 0$$

par conséquent, on déduit que $\alpha u - p \geq 0$ presque partout dans Ω.

Prenons maintenant $v = 2\overline{u}$ ensuite $v = 0$, on remarque que $v \geq 0$, donc v est dans U_{ad}.

En remplaçant successivement les deux valeurs de v dans la troisème équation du système (2.3.20), on obtient facilement

$$\int_\Omega (\alpha\overline{u} - \overline{p})\,\overline{u} = 0$$

Comme $\overline{u}$ est dans U_{ad} et $\alpha\overline{u} - \overline{p} \geq 0$, on remarque facilement que $(\alpha\overline{u} - \overline{p})\,u$ est une fonction positif presque partout, ce qui implique que

$$(\alpha u - p)(x)\,u(x) = 0, \text{ presque partout dans } \Omega$$

Posons

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega \mid u(x) = 0\} \text{ et } \Omega_+ = \{x \in \Omega \mid u(x) > 0\}$$

où il est bien clair que $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_+$

Sur Ω_+, on $\overline{u} > 0$ est donc on déduit de $(\alpha\overline{u} - \overline{p})(x)\,\overline{u}(x) = 0$, que $(\alpha\overline{u} - \overline{p}) = 0$, on obtient alors $\overline{u} = \frac{\overline{p}}{\alpha}$ et plus précisément $\overline{u} = \frac{1}{\alpha}\sup(0, \overline{p})$.

Sur Ω_0, on a $\overline{u} = 0$, celà veut dire que $\overline{u} = \sup(0, \overline{p}) = 0$, est donc $\overline{p} \leq 0$. Sur Ω_+, on a $\overline{u} > 0$ qui veut dire que $\overline{u} = \frac{1}{\alpha}\overline{p} > 0$.

Ainsi, le système (2.3.20), s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} -\Delta\overline{y} - \frac{1}{\alpha}\sup(0, \overline{p}) = f \text{ dans } \Omega \text{ et } \overline{y} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ -\Delta\overline{p} = z_d - \overline{y} \text{ dans } \Omega \text{ et } \overline{p} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \overline{u} = \frac{1}{\alpha}\sup(0, \overline{p}) \end{cases}$$

Exercice 3

On considére toujours le même systme donné par (2.3.20) qui est définie par

$$\int_\Omega (\alpha\overline{u}(x) - \overline{p}(x))(u(x) - \overline{u}(x))\,dx \geq 0, \quad \text{pour tout } u \text{ dans } U_{ad}. \tag{1}$$

où U_{ad}, est donné par

$$U_{ad} = \left\{ v \in L^2(\Omega) \mid u_a(x) \leq v \leq u_b(x) \text{ presque partout dans } \Omega \right\}$$

où $u_a(x)$ est $u_b(x)$ sont donnés dans $L^\infty(\Omega)$.

Montrer que l'inéquation variationnelle (1) est vérifiée si et seulement si pour presque tous x dans Ω on a

$$\overline{u}(x) \begin{cases} = u_a(x), & \text{si } \alpha\overline{u}(x) - p(x) > 0, \\ \in [u_a(x), u_b(x)], & \text{si } \alpha\overline{u}(x) - p(x) = 0, \\ = u_b(x), & \text{si } \alpha\overline{u}(x) - p(x) < 0. \end{cases} \tag{2}$$

Ainsi, l'inéquation variationnelle ponctuelle suivante est équivalente à (2) :

$$(\alpha\overline{u}(x) - p(x))(v - \overline{u}(x)) \geq 0, \quad \text{pour tout } v \text{ dans } [u_a(x), u_b(x)], \text{ p.p. } x \text{ dans } \Omega \tag{3}$$

Solution 3

On commence par démontrer l'implication (1)$\Rightarrow$ (2) on suppose que (2) ne définit pas les ensembles mesurables

$$\begin{aligned} A_+(\overline{u}) &= \{x \text{ dans } \Omega : \alpha\overline{u}(x) - p(x) > 0\}, \\ A_-(\overline{u}) &= \{x \text{ dans } \Omega : \alpha\overline{u}(x) - p(x) < 0\}, \end{aligned}$$

D'aprés l'hypothèse, (2) n'est pas satisfait. Donc, il existe un ensemble E_+ inclu dans $A_+(\overline{u})$ avec une mesure positive et

$$\overline{u}(x) > u_a(x), \quad \text{pour tout } x \text{ dans } E_+$$

ou un ensemble E_- inclu dans $A_-(\overline{u})$ avec une mesure positive et

$$\overline{u}(x) < u_b(x), \quad \text{pour tout } x \text{ dans } E_-.$$

Soit

$$u(x) = u_a(x) \text{ pour } x \text{ dans } E_+ \text{ et } u(x) = \overline{u}(x), \text{ pour } x \text{ dans } \Omega \setminus E_+.$$

Alors,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (\alpha\overline{u}(x) - p(x))(u(x) - \overline{u}(x))\,dx \\ = &\int_{E_+} (\alpha\overline{u}(x) - p(x))(u_a(x) - \overline{u}(x))\,dx < 0, \end{aligned}$$

car $\alpha\overline{u} - p > 0$ et $u_a < \overline{u}$ sur E_+. Comme $\overline{u}$ est dans U_{ad}, on a une contradiction avec (1). Ainsi, dans le deuxième cas nous procédons de manière analogue et on définit

$$u = u_b \text{ sur } E_- \text{ et } u = \overline{u} \text{ sur } \Omega \setminus E_-.$$

Maintenant, on démontre l'implication (2)$\Longrightarrow$ (3) On a $\overline{u} = u_a$ sur $A_+(u^*)$ p.p. Donc, $v - \overline{u}(x) \geq 0$ pour tout nombre réel v dans $[u_a(x), u_b(x)]$ pour x dans $A_+(\overline{u})$ presque partout.

En utilisant

$$\alpha\overline{u}(x) - p(x) > 0 \text{ dans } A_+(\overline{u})$$

on trouve

$$(\alpha\overline{u}(x) - p(x))(v - \overline{u}(x)) \geq 0 \text{ dans } A_+(\overline{u}) \text{ p.p.}$$

De même, on obtient

$$(\alpha\overline{u}(x) - p(x))(v - \overline{u}(x)) \geq 0 \text{ dans } A_-(\overline{u}) \text{ p.p.}$$

Il est claire que, (3) est vérifiée sur $\Omega \setminus (A_+(\overline{u}) \cup A_-(\overline{u}))$ presque partout.

3) Dinalement, on démontre l'implication (3) $\Rightarrow$ (1) Soit u dans U_{ad} . On a $u(x)$ dans $[u_a(x), u_b(x)]$ p.p. x dans Ω. En utilisant (3) avec $v = u(x)$ on a

$$(\alpha\overline{u}(x) - p(x))(u(x) - \overline{u}(x)) \geq 0 \quad \text{p.p.} x \text{ dans } \Omega.$$

En déduit immédiatement l'inéquation (1) par l'intégration.

D'aprés (3)

$$(\alpha\overline{u}(x) - p(x))\overline{u}(x) \leq (\alpha\overline{u}(x) - p(x))v, \quad \text{pour tout } v \text{ dans } [u_a(x), u_b(x)]. \tag{4}$$