# L'essentiel de la théorie de Mesure

Réalisé par Dr. A. Redjil
Département de mathématiques, UBMA, Annaba

April 12, 2021

**Abstract**

E-mail: a.redjil@univ-annaba.dz

## 1 L'essentiel de la théorie de mesure

La théorie de la mesure est l'outil utilisé pour modéliser le hasard.

## 2 Tribus et mesures

### 2.1 Tribus

Dans la suite, on utilisera un ensemble $\Omega$ que l'on appellera « univers ». Il contient tous les aléas possibles.

**Definition 1** *Une famille $\mathcal{A}$ de parties de est une tribu (sur $\Omega$) si elle vérifie*

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$ *(stabilité par passage au complémentaire)*
3. $A_0, A_1, A_2, ... \in \mathcal{A} \Longrightarrow \underset{n \geq 0}{\cup} A_n \in \mathcal{A}$ *(stabilité par la réunion dénombrable)*

**Remark 2** *On rappelle que:*

- $A^c := \{x \in \Omega : x \notin A\}$.
- *Une tribu est un ensemble de parties de $\Omega$ . Ces parties sont appelées «événements».*

**Proposition 3** *Stabilité par intersection dénombrable.*
*Soient $A$ une tribu et $A_0, A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$, alors $\underset{n \geq 0}{\cap} A_n \in \mathcal{A}$.*

**Proof.** On note pour tout $n$, $B_n = A_n^c$. Donc, par définition d'une tribu, $B_n \in \mathcal{A}$, $\forall n$ et $\underset{n\geq 0}{\cup} B_n \in \mathcal{A}$.

$$\begin{aligned} \underset{n\geq 0}{\cap} A_n &= \underset{n\geq 0}{\cap} B_n^c \\ &= \left(\underset{n\geq 0}{\cup} B_n\right)^c \\ \text{(par définition)} &\in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

■

**Example 4** *Pour n'importe quel ensemble* $\Omega$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ *est une tribu.*

**Example 5** *Pour n'importe quel ensemble* $\Omega$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ *(les parties de* $\Omega$*) est une tribu.*

**Proposition 6** *Soit* $A \subset \mathcal{P}(\Omega)$*, il existe une tribu notée* $\sigma(\mathcal{A})$ *telle que si* $\mathcal{B}$ *est une tribu telle que* $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ *alors* $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$*. On dira que* $\sigma(\mathcal{A})$ *est la plus petite tribu contenant* $\mathcal{A}$*, ou encore que* $\sigma(\mathcal{A})$ *est la tribu engendrée par* $\mathcal{A}$*.*

**Definition 7** *Soit l'ensemble de parties de* $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ *suivant:*

$$\mathcal{A} = \{\, ]a, b[\, : a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}\}$$

*(c'est l'ensemble des intervalles ouverts). La tribu* $\sigma(\mathcal{A})$ *s'appelle la tribu des boréliens et se note* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*.*

**Example 8** *Soit* $[a, b]$ *intervalle fermé de* $\mathbb{R}$*. Les intervalles* $]-\infty, a[\,, ]b, +\infty[$ *sont dans* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*. La famille* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *est une tribu donc* $]-\infty, a[\cup]b, +\infty[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *(stabilité par réunion dénombrable), et donc aussi* $(]-\infty, a[\cup]b, +\infty[)^c = [a, b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *(stabilité par passage au complémentaire). De même, on peut montrer que tous les intervalles de* $\mathbb{R}$ *sont dans* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*, ainsi que tous les singletons (les ensembles de la forme* $\{x\}$*,* $x \in \mathbb{R}$*).*

## 2.2 Mesures

**Notation 9** *Dans le calcul des mesures, on adopte les conventions de calcul suivantes (qui ne sont pas valables ailleurs) :* $\forall x \in \mathbb{R}$*,* $x + \infty = +\infty, 0 \times \infty = 0$.

**Definition 10** *Soit* $\Omega$ *un ensemble muni d'une tribu* $\mathcal{A}$*. On dit que* $\mu$ *est une mesure (positive) sur* $(\Omega, \mathcal{A})$ *si:*

1. $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ *(elle peut prendre la valeur* $\infty$*)*
2. $\mu(\emptyset) = 0$
3. *si* $A_0, A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$ *et sont deux à deux disjoints alors* $\mu\left(\underset{n\geq 0}{\cup} A_n\right) = \sum_{n\geq 0} \mu(A_n)$*.*

Quand $\mu$ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est telle que $\mu(\Omega) = 1$, on dit que $\mu$ est une mesure de probabilité (cette définition sera rappelée plus tard dans le cours). La tribu $\mathcal{A}$ contient tous les événements possibles et, pour $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A)$ est la probabilité que $A$ se produise.

**Definition 11** *Quand $\mu$ est telle que $\mu(\Omega) < \infty$, on dit que $\mu$ est une mesure finie. Quand on a un ensemble avec une tribu $\mathcal{A}$ sur $\Omega$, on dit que $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace mesurable. Si on a de plus, une mesure $\mu$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$, on dit que $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré.*

**Example 12** *Le triplet $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), card)$ est un espace mesuré. Nous avons vu (exemple2.1.5) que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est une tribu sur $\mathbb{N}$. De plus:*

1. *Pour $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $card(A)$(= le nombre d'éléments de $A$) est bien dans $[0, +\infty]$.*
2. *La partie $\emptyset$ est de cardinal $0$.*
3. *Si $A_0, A_1, A_2, ... \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ sont deux à deux disjoints, $card\left(\underset{n\geq 0}{\cup} A_n\right) = \sum\limits_{n\geq 0} card\,(A_n)$.*

**Proposition 13** *Monotonicité et mesure d'une différence*

*Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $A, B \in A$ tels que $B \subset A$*

- *Alors $\mu(B) \leq \mu(A)$.*
- *Si, de plus $\mu(A) < +\infty$, alors $\mu(A \backslash B) = \mu(A) - \mu(B)$.*

  *(Rappel: $A \backslash B = \{x : x \in A, x \notin B\}$).*

**Proof.** On a $\mu(A) = \mu(A \backslash B) + \mu(B)$ (car $A \backslash B$ et $B$ sont disjoints). Donc $\mu(B) \leq \mu(A)$. Si $\mu(A) < +\infty$, nous avons alors $\mu(A \backslash B) = \mu(A) - \mu(B)$. ■

**Proposition 14** *Sous-additivité.*

*Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Si $A_0, A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$ (pas forcément deux à deux disjoints).*

*Alors $\mu\left(\underset{n\geq 0}{\cup} A_n\right) \leq \sum\limits_{n\geq 0} \mu(A_n)$.*

**Proof.** On pose pour tout entier $k \geq 1$, $B_k = A_k \backslash \underset{0\leq i\leq k-1}{\cup} A_i$ (et nous avons alors, par convention, $B_0$=A$_0$).$Lesensembles$B$_0$, $B_1$,B$_2$, $...sontdeuxdeuxdisjoints.Nousavonsto$

$$\mu\left(\underset{n\geq 0}{\cup} A_n\right) = \mu\left(\underset{n\geq 0}{\cup} B_n\right)$$

(car $B_0, B_1, B_2, ...$sont deux à deux disjoints) $= \sum\limits_{n\geq 0} \mu(B_n)$

(car $\forall n, B_n \subset A_n) \leq \sum\limits_{n\geq 0} \mu(A_n)$. ■

**Proposition 15** *Mesure d'une réunion croissante.*

*Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré. Soient* $A_0, A_1, ... \in \mathcal{A}$ *tels que* $A_0 \subset A_1 \subset ... \subset A_n \subset A_{n+1} \subset ...$*Alors* $\mu\left(\underset{k\geq 0}{\cup} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

**Proof.** Posons pour tout $k \geq 1, B_k = A_k \backslash A_{k-1} (= \{x : x \in A_k, x \notin A+k-1\})$ et $B_0 = A_0$.

Les ensembles $B_0, B_1, B_2, ...$sont deux à deux disjoints. Donc

$$\begin{aligned} \mu\left(\underset{k\geq 0}{\cup} A_k\right) &= \mu\left(\underset{k\geq 0}{\cup} B_k\right) \\ &= \sum_{k\geq 0} \mu(B_k) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(B_k). \end{aligned}$$

On a $\forall n, \sum_{k=0}^{n} \mu(B_k) = \mu(A_n)$. Donc $\mu\left(\underset{k\geq 0}{\cup} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$. ■

**Proposition 16** *Mesure d'une intersection décroissante.*

*Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré. Soient* $A_0, A_1, ... \in \mathcal{A}$ *tels que* $A_0 \supset A_1 \supset ... \supset A_n \supset A_{n+1} \supset ...$*et tels que* $\mu(A_0) < +\infty$. *Alors* $\mu\left(\underset{k\geq 0}{\cap} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

**Proof.** Posons pour tout $k \geq 1, B_k = A_k \backslash A_{k+1}$. Les ensembles $B_0, B_1, B_2, ...$sont deux à deux disjoints.

Nous avons $\underset{k\geq 0}{\cap} A_k = A_0 \backslash \underset{k\geq 0}{\cup} B_k$, donc (par la proposition 2.2.6)

$$\begin{aligned} \mu\left(\underset{k\geq 0}{\cap} A_k\right) &= \mu(A_0) - \mu\left(\underset{k\geq 0}{\cup} B_k\right) \\ \text{(mesure d'une réunion disjointe)} &= \mu(A_0) - \sum_{k\geq 0} \mu(B_k) \\ &= \mu(A_0) - \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(B_k) \\ &= \lim_{n\to+\infty} (\mu(A_0) - \mu(B_0) - ... - \mu(B_n)) \\ \text{(mesure d'une réunion disjointe)} &= \lim_{n\to+\infty} \left(\mu(A_0) - \mu\left(\underset{0\leq k\leq n}{\cup} B_k\right)\right) \\ \text{(cf.prop.2.2.6)} &= \lim_{n\to+\infty} \mu(A_{n+1}) \end{aligned}$$

■

**Theorem 17** *Mesure de Lebesgue.*

*Il existe une mesure* $\lambda$ *sur* $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ *vérifiant*

1. *pour tout intervalle* $]a,b[$, $\lambda(]a,b[) = b - a$
2. $\forall A \in B(\mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda(\{y : y - x \in A\}) = \lambda(A)$.

*Cette mesure* $\lambda$ *s'appelle la mesure de Lebesgue.*

## 2.3 Fonction de répartition

L'étude de la fonction de répartition d'une mesure va nous permettre de mettre en oeuvre les théor'emes de ce chapitre.

**Definition 18** *Soit* $\mu$ *mesure sur* $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$ *telle que* $\mu(\mathbb{R}) < +\infty$*. On définit la fonction de répartition de* $\mu$ *par:*

$$\begin{array}{ccc} F_\mu & : & \mathbb{R} \to [0, +\infty[ \\ x & \longmapsto & F_\mu(x) = \mu\left(]-\infty, x]\right). \end{array}$$

**Proposition 19** *Soit* $\mu$ *mesure sur* $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ *telle que* $\mu(\mathbb{R}) < +\infty$*. La fonction* $F_\mu$ *est croissante, càdlàg (continue à droite avec une limite à gauche),* $\lim\limits_{x \to +\infty} F_\mu(x) = \mu(\mathbb{R})$*,* $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\mu(x) = 0$*.*

**Proof.** Soient $x \leq y$. Nous avons $]-\infty, x] \subset ]-\infty, y]$ donc, par la proposition 2.2.6, $F_\mu(x) = \mu(]-\infty, x]) \leq \mu(]-\infty, y]) = F_\mu(y)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \geq 0}$ suite de $\mathbb{R}$ telle que $u_n \geq x$ et $u_n \geq u_n + 1$, $\forall n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x$.

Pour tout n, $]-\infty, u_{n+1}] \subset ]-\infty, u_n]$, $\bigcap\limits_{n \geq 0} ]-\infty, u_n] = ]-\infty, x]$ et $\mu(]-\infty, u_0]) \leq \mu(\mathbb{R}) < \infty$,

donc, par la propostion sur l'intersection décroissante (prop. 2.2.9) $\lim\limits_{n \to +\infty} \mu(]-\infty, u_n]) =$

$\mu(\bigcap\limits_{n \geq 0} ]-\infty, u_n]) = \mu(]-\infty, x])$. En d'autres termes: $\lim\limits_{n \to +\infty} F_\mu(u_n) = F(x)$. Ceci prouve que $F$ est continue à droite.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \geq 0}$ suite de $\mathbb{R}$ telle que $u_n < x$ et $u_n \leq u_n + 1$, $\forall n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x$.

Pour tout n, $]-\infty, u_{n+1}] \supset ]-\infty, u_n]$, $\bigcup\limits_{n \geq 0} ]-\infty, u_n] = ]-\infty, x[$, donc par la propriété de réunion croissante (prop. 2.2.8), $\lim\limits_{n \to +\infty} F(u_n) = \mu(]-\infty, x[)$. Ceci prouve que $F_\mu$ a une limite à gauche (égale à $\mu(]-\infty, x[)$).

On trouve également la limite de $F_\mu$ en $+\infty$ en utilisant la propriété de réunion croissante et la limite de $F_\mu$ en $-\infty$ en utilisant la propriété d'intersection décroissante. ■

**Remark 20** *Dans la proposition précédente, la limite à gauche en* $x$ *de* $F_\mu$ *est* $\mu(]-\infty, x[)$ *et* $F\mu(x) = \mu(]-\infty, x])$*. Par la proposition 2.2.6,* $\mu(]-\infty, x]) - \mu(]-\infty, x[) = \mu(\{x\})$*. Donc* $F_\mu(x) = \mu(]-\infty, x[)$ *si et seulement si* $\mu(\{x\}) = 0$*.*