Les lois de probabilitès

Réalisé par Dr. A. Redjil
Département de mathématiques, UBMA, Annaba

April 13, 2021

Abstract

E-mail: a.redjil@univ-annaba.dz

1 Lois usuelles

1.1 Loi uniforme

Modèle On tire au hasard un nombre entier dans l'intervalle $[1, n]$, ces nombres sont équiprobables. On note X le résultat , par exemple X est le résultat d'un dé ou d'une boule numérotée dans une urne.

X suit une loi uniforme sur $[1, n]$ si $X(\Omega) = [a, b]$ et si pour tout $k \in [1, n]$, $p(X = k) = \frac{1}{n}$

Modèle : Toutes les valeurs de l'intervalle réel $[a, b]$ sont équiprobables.
La densité est constante $f(t) = k$ sur tout l'intervalle et $f(t) = 0$ nulle en dehors.
Comment déterminer k ?

Définition : Pour $a < b$: X suit une loi uniforme sur $[a, b]$ notée $\mathcal{U}_{[a,b]}$ si sa densité est :
$f(t) = \begin{matrix} \frac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{matrix}$

Théorème : Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$ alors:

X a une espérance $E(X)$ et une variance $V(X)$ données par:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \ V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} .$$

1.2 Loi de Bernoulli

Définition X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ avec $P(X = 1) = p$

On a alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$.

La loi de Bernoulli compte le nombre de succès en une experience (donc 0 ou 1).

Si X_k indique le succès lors de la $k^{ième}$ expérience, alors $\sum_k X_k$ compte le nombre total de succès.

1.3 Loi binomiale

Modèle C'est la loi du *nombre de succès* en n expériences *indépendantes* qui ont toutes la même probabilité p de succès.

Définition X suit une loi binomiale si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout entier $k \in [0; n]$:

$$P(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1 - p)^{n-k}$$

On a alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$

Somme Une somme de variable aléatoires indépendantes suivants des lois binomiales de même probabilité de succès en est encore une de même paramètre de succès et de premier paramètre (nombre d'expérience) la somme de leurs premiers paramètres.

1.3.1 Binomiale

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ si si $X(\Omega) = [0, n]$ et pour tout $k \in [0, n]$: $\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

$E(X) = n\,p$ et $V(X) = np(1 - p)$

à noter : Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ indépendantes de même paramètre de succès p alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n + m, p)$.

1.4 Loi hypergéométrique

Modèle Tirages successifs *sans remise* ou tirages simultanés parmi des bons et des mauvais (on peut considérer des boules de deux couleurs différentes). N le nombre total d'éléments, n le nombre d'éléments prélevés et p la proportion de bons. On note X le nombre de bons éléments prélevés.

Définition X suit une loi hypergéométrique de paramètres N, n et p si : on note $a = pN$ (nombre de bons éléments avec N est un entier) et $b = (1-p)N$ (nombre de mauvais éléments)

$$P(X=k) = \frac{\begin{pmatrix} a \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ n-k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}}$$

avec $X(\Omega) = [\max(0, n-b) ; \min(a, n)]$

(La formule reste vraie en dehors de cet intervalle, les probabilités étant simplement nulles)

On a $E(X) = np$.

1.5 Loi géométrique

Modèle C'est la loi du rang du premier succès dans une suite (infinie) d'expériences indépendantes qui ont toutes la même probabilité p de succès.

On fait des expériences jusqu'au succès, X est le rang du premier succès (les tirages ne sont plus indépendants car dès le succès l'expérience s'arrête).

Si le fait de continuer ensuite l'expérience ne change pas le rang du premier succès, et que l'on a alors les conditions d'une loi géométrique, alors X suivra également une loi géométrique.

Définition X suit une loi géométrique si $X(\Omega) = [1; +\infty[$ et pour tout entier $k \in [1; +\infty[$:

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1}\, p$$

On a alors $E(X) = \frac{1}{p}$ et $V(X) = \frac{(1-p)}{p^2}$

1.6 Loi de Poisson

Modèle C'est une loi qui approche la loi Binomiale $B(n,p)$ quand n tend vers $+\infty$ mais que le produit $n \cdot p$ reste constant $= \alpha$ (ou tend vers cette constante)

C'est la loi qui (empiriquement) modélise bien les fréquentations (nombre de clients à une caisse dans une journée, nombre des appels recus dans un centre téléphonique,...)

Définition X suit une loi de Poisson de paramètre α si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout entier $k \in \mathbb{N} : P(X=k) = \frac{\alpha^k e^{-\alpha}}{k!}$

On a alors $E(X) = \alpha$ et $V(X) = \alpha$

Somme une somme de variable aléatoires indépendantes suivants des lois de Poisson en est encore une de paramètre la somme des paramètres.

1.6.1 Poisson

$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\alpha)$ si si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\mathrm{P}(X = k) = \frac{e^{-\alpha}\alpha^k}{k!}$
$E(X) = \alpha$ et $V(X) = \alpha$
à noter : Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\alpha)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\beta)$ indépendantes alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\alpha + \beta)$.

1.7 Loi exponentielle

Définition : Soit $\alpha > 0$. X suit une loi exponentielle de paramètre α notée $\varepsilon(\alpha)$ si sa densité est $f(t) = \begin{cases} \alpha e^{\alpha t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

A remarquer : Si $X \hookrightarrow \varepsilon(\alpha)$ alors pour tout $x \geq 0$: $\mathrm{P}(X > x) = \exp(-\alpha x)$ et
$\mathrm{P}(X \leq x) = 1 - e^{-\alpha x}$.

Théorème : Si $X \hookrightarrow \varepsilon(\alpha)$ alors X a une espérance et une variance et $E(X) = 1/\alpha$ et $V(X) = 1/\alpha^2$

Exemple

Soit X la durée de vie d'un appareil.
On dit que la durée de vie est sans mémoire si le fait d'avoir déjà fonctionné un certain temps n'influe pas sur le temps de bon fonctionnement ultérieur.

Formalisation : X est sans mémoire si pour tout t et $h \geq 0.$: $\mathrm{P}(X > t + h \,|X > t\,) = \mathrm{P}(X > h)$.

1.8 Loi normale (de Laplace-Gauss)

1.8.1 Loi normale centrée réduite

Définition : X suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ si sa densité est $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$. Sa fonction de répartition est usuellement notée Φ.

Théorème : fonction de répartition La fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite Φ vérifie :
- $\Phi(0) = \frac{1}{2}$
- $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ (symétrie de la courbe représentative par rapport au point de coordonnés $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

Exercice

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. Calculer grâce à la table de la loi, $\mathrm{P}(X \leq 1)$; $\mathrm{P}(X \geq 1)$; $\mathrm{P}(X \leq -2)$; $\mathrm{P}(-2 \leq X \leq 1)$

Théorème : Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ alors X est centrée et réduite

Preuve : $te^{-t^2/2} = o\left(e^{-t}\right)$ donc $\int_0^{+\infty} t\varphi\left(t\right) dt$ converge (on peut aussi primitiver $te^{-t^2/2}$).

Et par imparité $\int_{-\infty}^{0} t\varphi\left(t\right) dt = -\int_0^{+\infty} t\varphi\left(t\right) dt$,

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi\left(t\right) dt = 0$.

Conclusion : $\boxed{X \text{ a une espérance } E\left(X\right) = 0.}$

On intègre par parties $\int_0^{M} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^2 e^{-t^2/2} dt$ avec $u\left(t\right) = te^{-t^2/2}$ (le t étant nécessaire comme dérivée du contenu) et on trouve que $\int_0^{+\infty} t^2\varphi\left(t\right) dt = \int_0^{+\infty} \varphi\left(t\right) dt$ et par parité $\int_{-\infty}^{0} t^2\varphi\left(t\right) dt = \int_0^{+\infty} t^2\varphi\left(t\right) dt$.

Donc X^2 a une espérance et $E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(t\right) dt = 1$.

Conclusion : $\boxed{X \text{ a une variance } V\left(X\right) = 1}$

Défintion : $v = \sigma^2 \geq 0$ et $m \in \mathbb{R}$.

X suit une loi normale de paramètres v et m notée $\mathcal{N}\left(m, v\right)$ si $X^* = \frac{X-m}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite.

La densité de X est alors $f\left(t\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2/2\right]$.

La courbe représentative de la densité a un maximum en m et des points d'inflexion en $m \pm \sigma$

Théorème : $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, v\right)$ alors X a une espérance et une variance et $E\left(X\right) = m$ et $V\left(X\right) = v$.

1.9 Variables centrés et réduites

Définition

Soit X une variable aléatoire discrète d'espérance $E(X) = m$, de variance $V(X)$ et d'écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$. Alors :

- La variable aléatoire $X - m$ a une espérance nulle : elle est dite centrée;

  la variable aléatoire $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ a une espérance nulle et un écart type égal à 1 : elle est dite centrée et réduite.

Propriété

Soient n un entier naturel et p un réel de $[0;1]$.Soit X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$. Alors la variable alétoire Z_n définie par $Z_n = \frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ a pour espérance 0 et pour écart type 1. La variable aléatoire Z_n est donc la variable centrée réduite associé à la variable X_n.

preuve

On a $X_n \sim \mathcal{B}(n;p)$ donc on sait que $E(X_n) = np$ et $\sigma(X_n) = \sqrt{np(1-p)}$. $E(Z_n) = E(\left(\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \frac{E(X_n)-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ par linéarité de l'espérance mathématique. On obtient

$$E(Z_n) = \frac{np - np}{\sqrt{np(1-p)}} = 0.$$

On a, $V(Z_n) = \frac{1}{np(1-p)} V(X_n - np)$ car $V(aX) = a^2 V(X)$ et $V(Z_n) = \frac{1}{np(1-p)} V(X_n)$ car $V(X + b) = V(X)$. Donc on obtient:
.

$$V(Z_n) = \frac{1}{np(1-p)} np(1-p) = 1.$$

1.10 Loi normale centrée

1.10.1 Théorème de Moivre-Laplace

On considère une suite de variables aléatoires (X_n) suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$. Soit $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$. Alors pour tous les réels a et b tels que $a < b$, on a $\lim_{n \to +\infty} P(a_n \leq Z_n \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Définition

Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite notée $\mathcal{N}(0; 1)$ si sa densité f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ c'est à dire si pour tout réel x on a :

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) dt.$$

.

Propriétés

- f est continue sur $\mathbb{R}$;

  l'aire totale sous la courbe de f est égale à 1

  f est paire donc sa scourbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

  $P(X \leq 0) = \frac{1}{2}$ c'est à dire que l'aire sous la courbe de $[0; +\infty[$ est $\frac{1}{2}$;

  Pour tout réel x, $P(X \leq -x) = P(X \geq x) = 1 - P(X \leq x)$.

Proposition
Si X est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$, alors pour tout $\alpha \in]0; 1[$, il existe un unique réel positif x_α tel que $P(-x_\alpha \leq X \leq x_\alpha) = 1 - \alpha$.

Preuve

D'après la symétrie de la courbe, on a pour tout réel x, $P(-x \leq X \leq x) = 2P(0 \leq X \leq x) = 2\int_0^x f(u)du = 2H(x)$ où H est la primitive de f sur $\mathcal{R}$ qui s'annule en 0. H est donc continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$. On a $\lim_{x\to+\infty} H(x) = \frac{1}{2}$. La fonction H est donc strictement croissante de 0 à 1 sur $[0;+\infty[$.

Pour tout réel $\alpha \in]0;1[$ on a $1-\alpha \in]0;1[$ et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réle x_α strictement positif tel que $2H(x_\alpha) = 1-\alpha$.

Remarque

En particulier on a $x_{0,05} \approx 1,96$ et $x_{0,01} \approx 2,58$ c'est à dire $P(-1,96 \leq X \leq 1,96) \approx 0,95$ et $P(-2,58 \leq X \leq 2,58) \approx 0,99$ ce qui signifie que environ 95% des réalisations se trouvent dans l'intervalle $[-1,96,1,96]$ et 99% se trouvent dans l'intervalle $[-2.58,2.58]$.

Propriété

Si $X \sim \mathcal{N}(0;1)$ alors $E(X) = 0$ et $\sigma(X) = 1$.

2