

**Exercice I**

Si  $X_i$  sont des variables aléatoires normalement distribuées de moyenne  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$ , alors :

$$\hat{\mu} = \frac{\sum X_i}{n} = \bar{X} \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n}$$

sont les estimateurs de  $\mu$  et  $\sigma^2$ , respectivement. Ces estimateurs sont-ils sans biais ? si non, donner les avec preuves.

**Exercice II**

La force de compression d'un certain type de béton est modélisée par une variable aléatoire gaussienne avec l'espérance  $\mu$  et la variance  $\sigma^2$ . L'unité de mesure est le psi (livre par pouce carré). Dans les questions 1. à 4., on supposera que la variance  $\sigma^2$  est connue et égale à 1000. Une moyenne empirique de 3250 psi a été observée sur un échantillon de 12 mesures.

1. Donnez un intervalle de confiance de 95% pour la moyenne  $\mu$ .
2. Donnez un intervalle de confiance de 99% pour la moyenne. Comparez sa largeur avec celle de l'intervalle de la question précédente. Donner votre interprétation.
3. Si vous utilisez le même échantillon, un intervalle de confiance d'amplitude de 30 psi de large a été défini, quel serait son niveau de confiance ?
4. Quel nombre d'essais minimal serait nécessaire pour estimer  $\mu$  avec une précision de  $\pm 15$  psi, au niveau de confiance 0,95 ?

**Exercice III**

La question de savoir si la cuisson à l'huile d'olive réduit le risque de thrombose est étudiée. Pour cela, le logarithme de la concentration en D-dimères, modélisé par une distribution normale, est considéré. Un échantillon de 9 personnes utilisant régulièrement l'huile de tournesol donne une moyenne de  $-0,78$ , avec un écart-type de  $0,27$ . Un échantillon de 13 personnes utilisant régulièrement l'huile d'olive donne une moyenne de  $-0,97$ , avec un écart-type de  $0,32$ .

1. Testez si la différence entre les variances observées des deux échantillons est significative ou non au seuil  $0,05$ .
2. Au seuil de  $0,05$ , quel test proposeriez-vous pour déterminer si l'huile d'olive réduit considérablement le risque de thrombose ? Quelle est votre conclusion ?
3. Dans une autre étude portant sur 110 utilisateurs d'huile de tournesol, une moyenne de  $-0,82$  a été observée, avec un écart-type de  $0,29$ , tandis que 130 utilisateurs d'huile d'olive ont une moyenne de  $-0,93$ , avec un écart-type de  $0,31$ . Trouvez la valeur du test pour déterminer si l'amélioration est significative. Au seuil  $0,05$ , quelle est votre conclusion ?

**Exercice IV**

Soit  $X$  le nombre de défauts dans les cartes de circuit imprimé. Un échantillon aléatoire de  $n = 60$  cartes de circuit imprimé est prélevé et le nombre de défauts enregistrés. Les résultats sont les suivants :

Nombre de défauts	Fréquence observée
0	32
1	15
2	9
3	4

Source : *Applied Statistics and Probability for Engineers - Montgomery and Runger*

L'hypothèse d'une distribution de Poisson semble-t-elle appropriée en tant que modèle pour ces données ?

**Bon courage.**

*"Qui veut chapitrer le prochain, fasse d'abord son examen." Proverbe italien*