Les notions de convergence

Réalisé par Dr. A. Redjil
Département de mathématiques, UBMA, Annaba

April 15, 2021

Abstract

E-mail: a.redjil@univ-annaba.dz

1 Les différentes notions de convergence

1.0.1 Loi des grands nombres

Notation 1 *Soient $X_1, X_2, ...$ des variables indépendantes et de même loi. On dira que ces variables sont indépendantes et identiquement distribuées et on utilisera la notation «i.i.d.».*

Theorem 2 *Loi faible des grands nombres*

Soient $X_1, X_2, ...$ des v.a.r. *i.i.d.* Si $\mathbb{E}(X_n^2) < \infty$, on a

$$\frac{X_1 + ... + X_n}{n} \underset{n \to +\infty}{\overset{L^2}{\to}} \mathbb{E}(X_1).$$

Theorem 3 *Loi forte des grands nombres*

Soient $X_1, X_2, ...$ des v.a.r. *i.i.d.* Si $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$ (en d'autres termes. Si X_1 est intégrable) alors

$$\frac{X_1 + ... + X_n}{n} \underset{n \to +\infty}{\overset{p.s.}{\to}} \mathbb{E}(X_1).$$

Definition 4 *Soit μ mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$, on appelle fonction caractéristique de μ la fonction suivante*

$$x \in \mathbb{R}^d \longmapsto \widehat{\mu}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{itx} \mu(dt) \in \mathbb{C}.$$

Si X est une v.a. de loi μ alors $\Phi_X = \widehat{\mu}$.

Theorem 5 *(dû à Paul Lévy) Soit* (μ_n) *une suite de mesures de probabilité sur* $\mathbb{R}^d$,

$$\left[\mu_n \underset{n\to+\infty}{\overset{étr}{\to}} \mu\right] \iff \left[\forall\xi \in \mathbb{R}^d, \widehat{\mu}_n(\xi) \underset{n\to+\infty}{\to} \widehat{\mu}(\xi)\right].$$

Ce qui s'énonce aussi

$$\left[X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{loi}{\to}} X\right] \iff \left[\forall\xi \in \mathbb{R}^d, \Phi_{X_n}(\xi) \underset{n\to+\infty}{\to} \Phi_X(\xi)\right].$$

Theorem 6 *Théorème central-limite (aussi noté TCL)*

Theorem 7 *Soit* (X_n) *une suite de v.a.r. i.i.d. avec* $\mathbb{E}(X_1) = m$ *et* $var(X_1) = \sigma^2 (m, \sigma^2 < \infty)$. *Alors*

$$\frac{X_1 + ... + X_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\overset{loi}{\to}} Z \text{ de loi } \mathcal{N}(0,1),$$

(où $\sigma > 0$ *est la racine carrée de la variance).*