Vecteurs aléatoires

Réalisé par Dr. A. Redjil
Département de mathématiques, UBMA, Annaba

April 15, 2021

Abstract
E-mail: a.redjil@univ-annaba.dz

Part I
Les vecteurs aléatoires

1 Couple de variables aléatoires, lois

1.1 Definition

On appelle couple de variables aléatoires réelles la donnée de deux variables aléatoires X et Y sur le même espace probabilisé (Ω, T, P).

On parle aussi de vecteur aléatoire réel, noté (X, Y).

Remarque

Si (X, Y) est un vecteur aléatoire et si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, alors $g(X, Y)$ est une variable

aléatoire. On considère les espaces probabilisés finis.

Exemple

Considérons l'expérience « on lance deux dés parfaits, de couleurs différentes ».

On peut définir plusieurs couples de variables aléatoires, comme X « la somme des résultats obtenus » et Y , « le plus grand des résultats obtenus ».

On peut définir d'autres couples de variables aléatoires, comme par exemple X_1 le résultat du lancer du premier dé, X_2 le résultat de l'autre dé.

On peut aussi étudier des vecteurs aléatoires tels que (X_1, X_2, Y) (à plus de 2 composantes, donc).

2 Loi conjointe, lois marginales (cas discret)

2.1 Definition

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire et
$X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$. On appelle loi conjointe

de$X$ et de$Y$ la famille de réels.
On appelle loi conjointe de X et de Y la famille de réels:
$\forall i \in [1, n], \forall j \in [1, m]$

$$P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = P_{ij}$$

On appelle lois marginales du couple(X, Y) les lois des variables aléatoires

X et Y .

2.2 Lien entre loi conjointe et loi marginale

D'après la formule des probabilités totales sur le système complet d'évènements

$(Y = y_j)_{1 \leq j \leq m}$:

$$\forall i \in [1, n], P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$$

De même pour la loi marginale suivant de Y

$$\forall j \in [1, m], P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$$

On peut représenter la loi conjointe de(X, Y) dans un tableau à deux entrées. L'ensemble des valeurs considérées est ici $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
Exemple: le jet de deux dés
Somme des coefficients
Avec les notations précédentes

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} P(Y = y_j) = 1.$$

2.3 Loi conditionnelle, indépendance de deux variables aléatoires

2.3.1 Lois conditionnées

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire et $x \in X(\Omega)$ tel que $P(X = x) \neq 0$.

On appelle loi de$Y$ conditionnée par l'évènement $[X = x]$, la famille de réels:

$$\forall j \in [1, m], P_{[X=x]}(Y = y_j) = \frac{P((X = x) \cap (Y = y_j))}{P(X = x)}$$

De même, on définit la loi de X conditionnée par l'évènement $[Y = y]$ tel que $P(Y = y) \neq 0$.

Exemple: Le jet de deux dés.

2.4 Couple de variables aléatoires indépendantes

On dit que deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si:

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \; P((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x)P(Y = y).$$

Propriété

Si deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes alors les lois de X conditionnées aux évènements $(Y = y)$ sont identiques à la loi de X (et de même pour$Y$).

Propriété

2.4.1 Fonctions de deux variables aléatoires indépendantes

Soit X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

2.4.2 Fonction de deux variables aléatoires

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire, g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $Z = g(X, Y)$. On note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$.

Le support de Z est

$$Z(\Omega) = \{g(x_i, y_j), i \in [1, n], \ j \in [1, m]\}$$

et la loi de Z est donnée par la formule:

$$\forall z \in Z(\Omega), P(Z = z) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega), \ y \in Y(\Omega) \\ g(x,y)=z}} P\left((X = x) \cap (Y = y)\right)$$

Si X et Y sont indépendantes, on a:

$$\forall z \in Z(\Omega), P(Z = z) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega), \ y \in Y(\Omega) \\ g(x,y)=z}} P(X = x)(Y = y).$$

2.4.3 Exemple: Sommes de deux variables aléatoires

Soit $X(\Omega) = [0, n]$, $Y(\Omega) = [0, m]$,alors la loi de $Z = X + Y$ est donnée par:

$$\begin{aligned} Z(\Omega) &= [0, n + m], \forall k \in Z(\Omega), \\ P(Z &= k) = \sum_{k=0}^{n+m} P\left((X = i) \cap (Y = k - i)\right). \end{aligned}$$

Exemple
-Somme de deux variables indépendantes suivant une loi uniforme.

3 Espérance – Formule de transfert

3.1 Formule de transfert

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire, g une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $Z = g(X, Y)$,

$$E(Z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} g(x_i, y_j) P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right).$$

3.2 Théorème- Linéarité de l'espérance

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

Démonstration: .Par la formule de transfert

3.3 Proposition

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire. Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X).E(Y)$.

Démonstration

Par la formule de transfert.

3.4 Covariance, coefficient de corrélation linéaire

3.4.1 Covariance

3.4.2 Définition- Covariance de deux variables aléatoires

Soit X et Y deux variables aléatoires. On appelle covariance de$X$ et Y le réel :

$$cov(X, Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

3.4.3 Théorème- Covariance de deux variables aléatoires indépendantes

Si Xet Y sont deux variables indépendantes, alors leur covariance est nulle.

Démonstration

Il suffit d'appliquer la proposition précedente.

La réciproque est fausse:

Exemple

Soit X de loi:

$(X = x)$	-1	0	1
$P(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

On considère la variable $Y = X^2$.

On trouve $E(X) = 0$ et $E(XY) = E(X^3) = 0$, donc $cov(X, Y) = 0$.

Mais $P([X = 0] \cap [Y = 1]) = 0 \neq P(X = 0)P(Y = 1)$, donc ces variables ne sont pas indépendantes.

3.4.4 Propriétés de la covariance

Soit X, Y, X_1 et X_2 des variables aléatoires et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
$cov(X, X) = V(X)$
$cov(X, Y) = cov(Y, X)$
$cov(aX, bY) = abcov(Y, X)$
$cov(X_1 + X_2, Y) = cov(X_1, Y) + cov(X_2, Y)$

3.4.5 Propriétés de la variance

Soit X et Y deux variables aléatoires et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:
$V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2abcov(X, Y)$.
$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X, Y)$.

3.5 Généralisation au cas de n variables aléatoires

3.5.1 Définition- Vecteur aléatoire

Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires.
On appelle vecteur aléatoire le $n-$uplet de variables aléatoires $(X_1, X_2, ..., X_n)$.

3.5.2 Espérance, variance, covariance

Linéarité de l'espérance Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un vecteur aléatoire et $a_1, a_2, ..., a_n$des réels:

$$E(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n) = a_1E(X_1) + a_2E(X_2) + \cdots + a_nE(X_n).$$

3.5.3 Indépendance mutuelle de plusieurs variables aléatoires

On dit que les n variables aléatoires $X_1, X_2, ..., X_n$ sont mutuellement indépendantes si et seulement si:

$$\forall (X_1, X_2, ..., X_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times ... \times X_n(\Omega) :$$

$$P([X_1 = x_1] \cap [X_2 = x_2] \cap ... \cap [X_n = x_n]) = P([X_1 = x_1])P([X_2 = x_2])...P([X_n = x_n]).$$

Propriété

Si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors toute sous-famille de $X_1, X_2, ..., X_n$ l'est aussi.

L'indépendance mutuelle entraîne donc l'indépendance deux à deux, mais la réciproque est fausse.

Propriété

Soit $X_1, X_2, ..., X_n$, n variables aléatoires mutuellement indépendantes, soit $p \in [1, n]$ et $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ et g $\mathbb{R}^{n-p} \to \mathbb{R}$:

Les variables aléatoires $f(X_1, X_2, ..., X_p)$ et $g(X_{p+1}, ..., X_n)$ sont indépendantes.

Propriété

Soit $X_1, X_2, ..., X_n$, n variables aléatoires mutuellement indépendantes, soit $u_1, u_2, ..., u_n$, des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les variables aléatoires $u_1(X_1), u_2(X_2), ...,$ $u_n\ (X_n)$ sont mutuellement indépendantes.

Théorème -Variance de la somme de variables aléatoires mutuellement indépendantes Si les variables $X_1, X_2, ..., X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors $V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$.

4