1 Types de convergence de variables aléatoires

1.1 Convergence en loi

Soient $F_1, F_2, ...$la suite des focntions de répartition associèes aux variables aléatoires reélles $X_1, X_2, ...$respectivement, et F la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

Autreument dit, F_n est définie par

$$F_n(x) = P[X_n \leq x],$$

et F par

$$F(x) = P[X \leq x].$$

On dit que la suite converge en loi ou en distribution si:

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(a) = F(a), \text{pour tout réel } a \text{ où } F \text{ est continue.}$$

On note la convergence en loi par:

$$X_n \to^{\mathcal{L}} X$$

Remarque: la convergence en loi est la forme la plus faible.

1.2 Convergence en probabilité

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires reélles définies sur le même espace probabilisé (Ω, Σ, P).

On dit que $(X_n)_n$converge en probabilité vers X si:

$$\forall \varepsilon \succ 0, \lim_{n \to +\infty} P[|X_n - X| \geq \varepsilon] = 0.$$

On note:

$$X_n \to^{P} X$$

1.3 Convergence presque sûre

On dit que $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers X si:

$$P\left[\lim_{n \to +\infty} X_n = X\right] = 1,$$

ou de manière équivalente, s'il existe N un sous ensemble $P-$négligeable: $N \subset \Omega$,tel que:

$$\forall w \in \Omega \setminus N \ , \ X_n(w) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} X(w).$$

On écrit :

$$X_n \rightarrow^{P.S} X.$$