Chaînes de Markov-Partie1

Réalisé par Dr. A. Redjil
Département de mathématiques, UBMA, Annaba

May 10, 2021

Abstract

E-mail: a.redjil@univ-annaba.dz

1 Chaînes de Markov

1.1 Notions de base

1.1.1 Introduction

Un processus de Markov est un processus stochastique possédant la propriété de Markov: l'information utile pour la prédiction du futur est totalement contenue dans l'état présent du processus et n'est pas dépendante des états antérieurs.

Une chaîne de Markov est un processus de Markov à temps discret, ou à temps continu et à espace d'états discret.

On considère un système qui admet un nombre d'états différents, l'état change au cours du temps discret.

A chaque changement, le nouvel état est choisi avec une distribution de probabilité fixée au préalable, et ne dépendant que de l'état présent.

1.1.2 Dynamique markovienne

On considère un processus aléatoire $(X_n)_{n\geq 0}$, défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et prenant ses valeurs dans un espace d'´etats discret E, fini ou dénombrable.

La distribution marginale de X_n est notée par (π_n) :

$$\pi_n(x) := P\left[X_n = x\right], \text{ pour tout } x \in E$$

et $\mathcal{F}_X$ la σ-algèbre qui représente l'information disponible à la date n sur la base de l'observation du processus X:

$$\mathcal{F}_n^X \quad := \quad \sigma(X_0, X_1, ..., X_n)$$

Définition Une chaîne de Markov est un processus stochastique dont la dépendance au passé est résumée par la seule observation présente.

On dit que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov si:

$$P\left[X_n \in A|\mathcal{F}_{n-1}^X\right] = P\left[X_n \in A|X_{n-1}\right], \text{pour tout } A \subset E \text{ et } n \geq 1.$$

Les matrices de transition $P_n = (P_n(x,y))_{x,y\in E}$ sont définies par:

$$P_n(x,y) := P\left[X_n = y|X_{n-1} = x\right]$$

et elles représentent les probabilités de transistion introduites dans la définition précédente.

Remarque Les matrices sont de taille au plus dénombrable car l'espace d' ́etat

E est au plus dénombrable.

Terminologie les matrices de transition sont des matrices stochastiques:

$$P_n(x,y) \geq 0 \text{ et } \sum_{y\in E} P_n(x,y) = 1, \text{ pour tous } x, y \text{ dans } E.$$

On constate que $P_n(x,.)$ définit une mesure de probabilité sur l'espace d' ́état discret E.

Remarque Pour toute chaine de Markov, on peut construire une suite de

matrices de transition $(P_n)_{n_{\geq 0}}$.

La reciproque est donnée par la proposition suivante:

Proposition Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de distribution uniforme sur l'intervalle $[0,1]$,soit $(P_n)_{n\geq 1}$ une suite de matrices stochastiques sur un espace d'´etat E. Pour toute distribution initiale π_0, il existe une chaîne de Markov de loi initiale π_0 et de matrices de transition $(P_n)_{n\geq 1}$.

Preuve

Soit $E = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$, $\Pi_0(i) = \sum_{j\leq i} \pi_0(x_j)$. La variable initiale est définie par:

$$X_0 = \sum_{i\geq 0} x_i 1_{]\Pi_0(i-1),\ \Pi_0(i)]}(U_0)$$

Notons que la variable X_0 est distribuée suivant la loi π_0, d'autre part on considère la variable aléatoire X_{n-1} et on pose:

$$\Pi_n^{X_{n-1}}(i) = \sum_{j\leq i} P_{n-1}(x_{n-1}, x_j)$$

On définit X_n par:

$$X_n = \sum_{i\geq 0} x_i 1_{\left]\Pi_n^{X_{n-1}}(i-1),\ \Pi_n^{X_{n-1}}(i)\right]}(U_0)$$

dont la loi conditonnelle par rapport à X_{n-1} est $P_{n-1}(X_{n-1}, .)$. ■

Conclusion

Une chaîne de Markov est entièrement déterminée par la donnée de sa matrice de transition P et sa loi initiale π_0.