Chaînes de Markov- Partie 2

Réalisé par Dr. A. Redjil
Département de mathématiques, UBMA, Annaba

May 10, 2021

Abstract

E-mail: a.redjil@univ-annaba.dz

1 Chaînes de Markov- Suite

1.1 Distributions marginales

Soit $(X_0, X_1, ..., X_n)$ un vecteur ($n-$uplet) extrait d'une chaîne de Markov X, les conditionnements successifs permet de définir la distribution de $(X_0, X_1, ..., X_n)$ par:

$$\begin{aligned} P\left[(X_0, X_1, ..., X_n) = (x_0, x_1, ..., x_n)\right] &= P\left[(X_0 = x_0\right].P_1(x_0, x_1)...P_n(x_{n-1}, x_n) \\ &= \pi_0(x_0).P_1(x_0, x_1)...P_n(x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

pour tout $x_0, x_1, ..., x_n \in E$.

Remarque

On déduit les probabilités marginales π_n de la distribution π_0 et des matrices de transition:

$$\pi_n(x) = \sum_{x_0, x_1, ..., x_{n-1 \in E}} \pi_0(x_0).P_1(x_0, x_1)...P_n(x_{n-1}, x)$$

En utilisants les notations des matrices, la formule de la distribution π_n est donnée par:

$$\pi_n = \pi_0.P_1...P_n, \text{pour tout } n \geq 1,$$

La distribution π_0 est considérée comme un vecteur ligne de taille $card(E)$ multipliant à gauche le produit de matrices $P_1, .., P_n$.

1.1.1 Formule de Chapman-Kolmogorov

On met l'accent une notion de base importante: formule de Chapman-Kolmogorov.

La formule de Chapman-Kolmogorov exprime le fait que la probabilité d'aller de x en y entre la date 0 et la date n se décompose comme la somme des probabilités d'aller de x en y en passant par un état z arbitraire à une date intermédiaire k, elle est donnée par:

$$\begin{aligned} P\left[X_n = y \mid X_0 = x\right] &= \sum_{z \in E} P\left[X_n = y \mid X_k = z\right].P\left[X_k = z \mid X_0 = x\right];\ x, y \in E\ , \\ \text{pour tous} \quad 0 &\leq k \leq n. \end{aligned}$$

1.1.2 Espérance conditionnelle et matrice de transition

Pour toute fonction intégrable ou positive $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$,l'ésperance conditionnelle $E\left[f\left(X_n\right) \mid F_{n-1}^X\right]$ se calcule en utilisant la matrice de transition P_n :

$$\begin{aligned} E\left[f\left(X_n\right) \mid F_{n-1}^X\right] &= E\left[f\left(X_n\right) \mid X_{n-1}\right] \\ : &= \left(P_n f\right)\left(X_{n-1}\right) = \sum_{y \in E} P_n(X_{n-1}, y) f(y). \end{aligned}$$

Si on représente f par un vecteur colonne $f(x), x \in E$, de taille card E,la formule de $E\left[f\left(X_n\right) \mid F_{n-1}^X\right]$ présente le produit matriciel à droite $P_n f$:

$$E\left[f\left(X_n\right) \mid X_{n-1} = x\right] = \left(P_n f\right)(x)$$

1.1.3 Espérance non conditionnelle et matrice de transition

L'espérance non conditionnelle de la variable aléatoire $f\left(X_n\right)$ se calcule par le produit matriciel:

$$E\left[f\left(X_n\right)\right] = \pi_0 P_1 ... P_n f, \text{ pour tout } n \geq 1$$

Notons que la distribution π_0 est représentée par un vecteur ligne, alors que la fonction f est représentée par un vecteur colonne.

1.1.4 Propreté de Markov

Si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov caractérisée par la distribution initiale π_0 et les matrices de transition $(P_n)_{n\geq 0}$, le processus stochastique $(X_{k+n})_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov caractérisée par la distribution initiale π_k et les matrices de transition $(P_{k+n})_{n\geq 0}$. Le résultat suivant montre que cette propriété s'étend aux temps d'arrêt.

1.1.5 Théorème (Propriété de Markov forte)

Soient $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov et τ un temps d'arrêt à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors pour tout $A \subset E$ et $n \geq 1$:

$$P[X_{\tau+n} \in A | F^X_{\tau+n-1}] = P[X_{\tau+n} \in A | X_{\tau+n-1}].$$

Preuve
Voir [17]

1.1.6 Chaînes de Markov homogènes

On s'intéresse aux chaînes de Markov dont les transitions sont indépendantes de la variable temporelle. La distribution d'une chaîne de Markov homogène est caractérisée par la

distribution π_0 de la variable al´eatoire initiale X_0 et la matrice de transition P.

Définition Une chaîne de Markov $X = (X_n)_{n\geq 0}$est dite homogène si sa matrice de transition P_n est indépendante de n.

Les distributions marginales sont définies par les puissances de la matrice de transition:

$$\pi_n = \pi_0 P^n, \text{pour tout} \quad n \geq 1$$

Remarque La décomposition algébrique de la puissance P^n est définie par

les produits P^k. P^{n-k}, pour tout $k \leq n$, la formule de Chapman-Kolmogorov représente l'aspect probabiliste de cette décomposition.

Résultat On considère $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov homogène de distribution initiale π_0 et de matrice de transition P. Le processus aléatoire $(X_{k+n})_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène caractérisée par la distribution initiale π_k et la matrice de transition P.

On peut généraliser ce résultat aux temps d'arrêts en s'appuyant sur la propriété de Markov forte.

Rappel

Théorème
Soit $X = (X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov et τ un temps d'arrêt à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{N}$,pour toute partie A de E et $n \geq 1$:

$$E\left[X_{\tau+n} \in A \mid F^X_{\tau+n-1}\right] = E\left[X_{\tau+n} \in A \mid X_{\tau+n-1}\right].$$

1.1.7 Graphe de transition

A toute chaîne de Markov, on peut associer un graphe de transition de la façon suivante: les sommets du graphe sont les états de la chaîne et il existe un arc, étiqueté $P_{i;j}$,de i vers j si $P_{i;j} \succ 0$.

1.1.8 Exemples sur les chaînes de Markov

Exemple 1 Une suite de variables aléatoire indépendantes identiquement distribuées (i.i.d) forme une chaîne de Markov. (à vérifier)

Exemple 2 Toute suite de variables aléatoires discrètes peut être transformée en une chaîne de Markov.

On considère une suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\geq 0}$ définies sur un espace probabilisé (Ω, F, P), pour tout $n \geq 0$,on définit $X_n := (Z_0, Z_1, ..., Z_n)$.

le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov. (à vérifier)

Exemple 3 (Processus de Galton-Watson) On considère le processus généalogique suivant : la première génération (numérotée 0) est constituée d'un nombre donné P_1 d'individus. A chaque génération, chaque individu appartenant à cette génération donne lieu à un nombre aléatoire d'enfants, qui appartiennent à la génération suivante, la règle étant que les nombres d'enfants obtenus par les différents individus aux cours des différentes générations sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (i.i.d).

La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ définie par X_n :=nombre d'individus présents dans la génération numéro n, constitue une chaîne de Markov. (à vérifier)

Exemple 4 (Urne d'Ehrenfest) On considère un récipient contenant un nombre total de $N \geq 1$ particules, divisé en deux cavités, numérotées 1 et 2, qui communiquent. A chaque pas de temps, une particule parmi les N est choisie uniformément au hasard, et passe de la cavité où elle se trouve à l'autre. En définissant $X_n :=$ nombre de particules dans la cavité 1, la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ forme une chaîne de Markov. (à vérifier)

Exemple 5 (Ligne téléphonique) On considère une ligne de téléphone. L'état X_n de cette ligne à l'étape n est 0 si elle est libre et 1 si elle occupée. Entre deux instants successifs, il y a une probabilité $\frac{1}{2}$ pour qu'un appel arrive. Si la ligne est occupée et qu'un appel arrive, cet appel est perdu. La probabilité pour que la ligne se libère entre l'instant n et l'instant $(n+1)$ est $\frac{1}{3}$. La matrice de transition est la suivante:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$