Chaînes de Markov- Partie3

Réalisé par Dr. A. Redjil
Département de mathématiques, UBMA, Annaba

May 10, 2021

Abstract

E-mail: a.redjil@univ-annaba.dz

0.1 Chaînes de Markov absorbantes

0.1.1 Définition

On considère une chaîne de Markov $X = (X_n)_{n \geq 0}$,On dit qu'un état $j \in E$ est accessible depuis un autre état $i \in E$, s'il existe un temps $n \in \mathbb{N}$ tel que $p_{i,j}^{(n)} \succ 0$; partant de i, on atteint j avec probabilité positive en un nombre fini de pas.

Notation
Si l'état $j \in E$ est accessible depuis l'état i,on note $i \to j$.
Si on a à la fois $i \to j$ et $j \to i$, on note: $i \sim j$.

Remarque
La relation $\sim$ est une relation d'équivalence.(à vérifier)

0.1.2 Définition

Un état i est dit absorbant si la probabilité $p_{i,i} = 1$, autrement dit $p_{i,j} = 0$ pour tout $j \neq i$. Une chaîne de Markov est dite absorbante s'il existe, pour tout état de E, un état absorbant accessible depuis cet état.

Une chaîne de Markov est dite absorbante s'il existe, pour tout état de E, un état absorbant accessible depuis cet état.

0.2 Chaînes de Markov irréductibles

0.2.1 Définition

Une chaîne de Markov est dite irréductible ou ergodique si $i \sim j$, $\forall i, j \in E$. La chaîne est dite régulière s'il existe une puissance P^n de P dont tous les éléments sont strictement positifs.

Une chaîne de Markov régulière est nécéssairement irréductible, car tout état est accessible depuis tout autre en n pas au plus. La réciproque n'est pas vraie, car le nombre de pas n'est pas précisé dans la définition de l'irréductibilité.

Exemple

Dans le modèle d'Ehrenfest, la chaîne de Markov est irréductible. Quelque soit le nombre de boules (particules) dans l'urne à guanche, on peut atteindre tout autre état en déplacant au plus N boules d'une urne a l'autre. Mais la chaîne n'est pas régulière. Comme à chaque pas de temps on déplace exactement une boule, le nombre de boules dans l'urne de gauche sera pair et impair alternativement. Donc, chaque élément de P^n, matrice des puissances sera nul pour un n sur deux.

0.2.2 Définition

Pour un sous-ensemble A de l'éspace E, on appelle temps de premier passage de la chaîne dans A la variable aléatoire définie par:

$$\tau_A = \inf \{n \succ 0, X_n \in A\},$$

si on conidère le cas particulier $A = \{i\}$, on note τ_A par τ_i au lieu de $\tau_{\{i\}}$.

0.3 Chaînes de Markov réversibles

On considère un espace d'état dénombrable, il peut être infini. L'ensemble F^E désigne l'ensemble des applications $f : E \to F$.

0.3.1 Définition

Soit P une matrice aléatoire (stochastique), un vecteur $(\alpha_i\ )_{i\in E} \in [0,\infty)^E$, , est dit réversible par rapport à P si:

$$\alpha_i p_{ij} = \alpha_j p_{ji}, \forall i, j \in E.$$

Une chaîne de Markov est dite réversible si sa matrice admet un vecteur réversible.

La relation précédente définie par:

$$\alpha_i p_{ij} = \alpha_j p_{ji}, \forall i, j \in E$$

.est appelée condition d'équilibre détaillé en physique. Elle signifie que si les états i et j sont occupés avec probabilités proportionnelles ài et j respectivement, alors les taux de transition de i à j et de j à i sont égaux.

0.4 Récurence, transience et période

On s'intéresse par l'étude de quelques propriétés des chaînes de Markov sur un ensemble dénombrable E. On définit le temps de premier passage de la chaîne en un site $i \in E$

est identifié par la variable aléatoire representée par la formule suivante:

$$\tau_i = \inf \{n \geq 1, X_n = i\}.$$

Par convention on a,

$$\tau_i = \infty, \text{ si } X_n \neq i, \forall n \geq 1.$$

Remarques

- On appelle τ_i le temps de premier retour en i, dans le cas où la chaîne démarre au temps 0 dans l'état i.

- Pour une chaîne irréductible et dans le cas où E est fini, le premier passage de la chaîne en un site i; τ_i est fini presque sûrement.

0.4.1 Définition

Un état $i \in E$ est dit récurrent si:

$$P_i \{\tau_i \prec \infty\} = \lim_{N \to \infty} P_i \{\tau_i \leq N\} = \sum_{n=1}^{\infty} P_i \{\tau_i = n\} = 1.$$

La chaîne de Markov est appelée récurrente, si tous ses états sont récurrents.

Remarque

On considère un état récurrent, la chaîne de Makov revient vers cet état presque sûrement.

0.5 Définition

Un état $i \in E$ est dit transient s'il n'est pas récurrent. La chaîne de Markov est appelée transiente, si tous ses états sont transients.

Remarque

Le fait qu'un état soit transient signifie que la chaîne de Markov a une probabilité non nulle de ne jamais retourner dans cet état.

0.6 Définition

La période d'un état i est le nombre:

$$d_i = p\,\mathrm{gcd}\left\{n \geq 1 : P_i\left\{X_n = i\right\} \succ 0\right\}$$

Si $d_i = 1$, on dit que l' état i est apériodique. La chaîne de Markov est apériodique si tout état $i \in E$ est apériodique.

Exemple
Une chaîne régulière est apériodique. (à vérifier).

Remarque
On a introduit la relation d'équivalence $i \sim j$, les propriétés de récurrence, transience et la période sont constantes sur les classes d' équivalence. On définit les classes récurrentes ou transientes, et la période d'une classe. Si la chaîne est irréductible, alors elle est respectivement récurrente, transiente ou apériodique si et seulement si elle admet un état récurrent, transient ou apériodique.

0.7 Distributions stationnaires

On considère une chaîne de Markov irréductible sur un ensemble dénombrable E, de matrice de transition $P = (p_{i,j})$,avec $i, j \in E$.

0.7.1 Définition

Une distribution de probabilité μ sur E est dite stationnaire, si elle vérifie la relation suivante:

$$\mu_j = \sum_{i \in E} \mu_i p_{i,j}, \forall j \in E.$$

Généralisation

Une mesure μ sur E vérifiant:

$$\mu_j = \sum_{i \in E} \mu_i p_{i,j}, \forall j \in E,$$

est appelée une mesure invariante de la chaîne de Markov.

Exemple

La chaîne irréductible admet une distribution stationnaire dans le cas d'espace E fini.

Exercice

Une personne possède 3 parapluies. Chaque jour, elle va au bureau le matin, et revient a son domicile le soir. Pour chaque trajet, elle emporte avec elle un parapluie s'il pleut, et s'il y en a au moins un sur place. Elle n'emporte pas de parapluie s'il ne pleut pas. On suppose que la probabilité qu'il pleuve au début de chaque trajet est de $\frac{1}{3}$, et qu'elle est indépendante de la météo lors de tous les autres trajets. Soit X_n le nombre de parapluies que cette personne possède sur place avant de débuter le nième trajet.

1. Montrer que$(X_n)_n$ est une chaîne de Markov, et donner sa matrice de transition.
2. De quel type de chaîne s'agit-il?.
3. Quelle est la probabilité, asymptotiquement au bout d'un grand nombre de voyages, que la personne ne dispose pas de parapluie sur place au moment de partir?.
4. Quelle est la probabilité asymptotique qu'elle se fasse mouiller bêtement, (elle n'ait pas de parapluie à sa disposition alors qu'il pleut dés son départ)?.

1