Université Badji Mokhtar-Annaba, Département de Mathématiques

Série N°1 (Optimisation non linéaire)

Master 1 (COTA)

Exercice 1 *Soit$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continument différentiable*

1. *Soit x_0 tel que $f(x_0) = 0$. Que représente $g(x_0)$ pour la surface de niveau*
$$S := \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, f(x) = f(x_0)\}$$
2. *Rappeler l'équation de l'hyperplan affine (de $\mathbb{R}^{n+1}$) tangent au graphe de f en $(x_0\,,\, f(x_0))$. Donner à l'aide de $g(x_0)$ un vecteur normal à cet hyperplan*
3. *On suppose qu'il existe $L > 0$ tel que*
$$\|g(x) - g(x')\| \leq L\,\|x - x'\| \text{ pour tout } (x\,,\,x') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$
Montrer qu'alors
$$\left|f(x+d) - f(x) - g(x)^t d\right| \leq \frac{L}{2}\,\|d\|^2 \text{ pour tout } (x\,,\,d)\in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

Exercice 2 *Calculer s'il y a lieux $\nabla f(x)$, $\nabla^2 f(x)$, $JF(x)$ pour*

1. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\; x \mapsto f(x) = c^t x + \gamma.$
2. $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\; x \mapsto F(x) = Lx + b$, *où* $L \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.
3. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\; x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{2}\,x^t A x + d^t x + \delta$, *où* $L \in M_n(\mathbb{R})$
4. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\; x \mapsto f(x) = \sum_{i=1}^m \left[r_i(x)\right]^2$, *où les $r_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont deux fois différentiables.*

Exercice 3 *Montrer les propositions suivantes*

1. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, différentiable en $\bar{x}$. Si $\bar{x}$ est un minimum local, alors $g(\bar{x}) = 0$.*
2. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, deux fois différentiable en $\bar{x}$ et supposons que $\bar{x}$. soit un minimum local, alors $g(\bar{x}) = 0$ et $H(\bar{x})$ est SDP.*
3. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, deux fois différentiable en $\bar{x}$. Si $g(\bar{x}) = 0$ et $H(\bar{x})$ est DP alors $\bar{x}$ est un minimum local strict.*
4. *Si f est convexe sur $\mathbb{R}^n$ et si $g(\bar{x}) = 0$ alors $\bar{x}$ est un minimum global.*

Exercice 4 *Détailler la démonstration du théorème 1.4 du cours.*