Série N°1 (Optimisation non linéaire)

Exercice 1 *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *continument différentiable*

1. *Soit* x_0 *tel que* $f(x_0) = 0$. *Que représente* $g(x_0)$ *pour la surface de niveau*

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, f(x) = f(x_0)\}$$

2. *Rappeler l'équation de l'hyperplan affine (de* $\mathbb{R}^{n+1}$*) tangent au graphe de* f *en* $(x_0 \, , \, f(x_0))$. *Donner à l'aide de* $g(x_0)$ *un vecteur normal à cet hyperplan*
3. *On suppose qu'il existe* $L > 0$ *tel que*

$$\|g(x) - g(x')\| \leq L \, \|x - x'\| \text{ pour tout } (x \, , \, x') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

Montrer qu'alors

$$\left| f(x+d) - f(x) - g(x)^t d \right| \leq \frac{L}{2} \, \|d\|^2 \text{ pour tout } (x \, , \, d) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

Solution: Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continument différentiable

1. Plaçons nous sur la surface S au point $x_0 \in S$ est soit $d \in \mathbb{R}^n$ un petit déplacement sur la surface S ($\Longrightarrow x_0 + d \in S$) donc

$$df = f(x_0 + d) - f(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0 = g(x_0)^T d$$

et de ce fait $g(x_0)$ et perpendiculaire à S.

2. L'équation de l'hyperplan affine (de $\mathbb{R}^{n+1}$) tangent au graphe de f en $(x_0 \, , \, f(x_0))$ est donné par

$$y - f(x_0) = g(x_0)^T (x - x_0).$$

Choisissons deux points sur l'hyperplan affine tangent par exemple $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1 = 0, y_1 = f(x_0) - g(x_0)^T x_0)$, un vecteur porter par l'hyperplan peut être donné par

$$(x_0 - x_1, y_0 - y_1) = (x_0, g(x_0)^T x_0)$$

un vecteur normal à ce dernier vérifie

$$(u, v)^T (x_0, g(x_0)^T x_0) = u^T x_0 + v \cdot g(x_0)^T x_0 = 0$$

on peut prendre $u = g(x_0)$ et $v = -1$ donc

$$(u, v) = (g(x_0), -1).$$

3. La formule de Taylor avec reste intégrale

$$f(x+d) = f(x) + \int_0^1 \left[g(x+td)^T d \right] dt$$

en plus

$$f(x+d) - f(x) - g(x)^T d = \int_0^1 \left(\left[g(x+td) - g(x) \right]^T d \right) dt.$$

L'hypothèse sur g conduit à

$$\begin{aligned} \left| f(x+d) - f(x) - g(x)^T d \right| &\leq \int_0^1 \left| \left[g(x+td) - g(x) \right]^T d \right| dt \\ &\leq \int_0^1 \| g(x+td) - g(x) \| \, \|d\| \, dt \\ &\leq \int_0^1 tL \, \|d\|^2 \, dt = \frac{L}{2} \|d\|^2 . \end{aligned}$$

■

Exercice 2 *Calculer s'il y a lieux* $\nabla f(x)$, $\nabla^2 f(x)$, $JF(x)$ *pour*

1. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = c^t x + \gamma$.
2. $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto F(x) = Lx + b$, *où* $L \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.
3. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{2} x^t A x + d^t x + \delta$, *où* $L \in M_n(\mathbb{R})$
4. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = \sum_{i=1}^m \left[r_i(x) \right]^2$, *où les* $r_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *sont deux fois différentiables.*

Solution:

1. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = c^t x + \gamma$. $f(x+h) = c^T(x+h) + \gamma \Longrightarrow f(x+h) - f(x) = c^T h \Longrightarrow g(x) = c,\ H(x) = 0$.
2. $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto F(x) = Lx + b$, où $L \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. $g(x) = L,\ H(x) = 0$.

3. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{2}\, x^t A x + d^t x + \delta$, où $A \in M_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \frac{1}{2}(x+h)^T A(x+h) + d^T(x+h) + \delta \Longrightarrow f(x+h) - f(x) = \\ &= \frac{1}{2}\left(x^T A h + h^T A x + h^T A h\right) + d^T h \\ &= \frac{1}{2} x^T (A + A^T) h + \frac{1}{2} h^T \left[\frac{1}{2}(A + A^T)\right] h + d^T h \\ \Longrightarrow & g(x) = \frac{1}{2}(A + A^T) x + d^T,\ H(x) = \frac{1}{2}(A + A^T). \end{aligned}$$

4. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = \sum_{i=1}^m [r_i(x)]^2$, où les $r_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont deux fois différentiables. $g(x) = 2\sum_{i=1}^m r_i(x)\nabla r_i(x),\ H(x) = 2\sum_{i=1}^m \left[\nabla r_i(x)^T \nabla r_i(x) + r_i(x)\nabla^2 r_i(x)\right]$.

■

Exercice 3 *Montrer les propositions suivantes*

1. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, différentiable en $\bar{x}$. Si $\bar{x}$ est un minimum local, alors $g(\bar{x}) = 0$.*
2. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, deux fois différentiable en $\bar{x}$ et supposons que $\bar{x}$. soit un minimum local, alors $g(\bar{x}) = 0$ et $H(\bar{x})$ est SDP.*
3. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, deux fois différentiable en $\bar{x}$. Si $g(\bar{x}) = 0$ et $H(\bar{x})$ est DP alors $\bar{x}$ est un minimum local strict.*
4. *Si f est convexe sur $\mathbb{R}^n$ et si $g(\bar{x}) = 0$ alors $\bar{x}$ est un minimum global.*

Solution:

1. Par l'absurde, en supposant que $g(\bar{x}) \neq 0$ et on prend $d = -g(\bar{x})$ qui est une direction de descente (car $g(\bar{x})^\top d = -\|g(\bar{x})\|^2 < 0$) et d'après la définition d'une direction de descente, $\bar{x}$ n'est pas un minimum local.
2. D'après le résultat précédent $g(\bar{x}) = 0$. Par contradiction, supposons que $H(\bar{x})$ n'est pas SDP. Alors, on peut choisir un vecteur d tel que $d^\top H(\bar{x}) d < 0$. En utilisant le développement de Taylor au voisinage de $\bar{x}$, il existe un $\bar{t} \in> 0$ tel que pour tout $t \in]0, \bar{t}]$ on a
$$f(\bar{x} + td) = f(\bar{x}) + t g(\bar{x})^\top d + \frac{1}{2} t^2\, d^\top H(\bar{x}) d < f(\bar{x}).$$
3. Choisissons $\epsilon > 0$ assez petit de sorte que pour tout $x \in B(x^*, r) = \{z \in \mathbb{R}^n :\ \|z - x^*\| < \epsilon\}$ on a
$$f(x) = f(\bar{x}) + g(\bar{x})^\top (x - \bar{x}) + \frac{1}{2}\, g(\bar{x})^\top (x - \bar{x}) = f(\bar{x}) + \frac{1}{2}\,(x - \bar{x})^\top H(\bar{x})(x - \bar{x})$$
puisque $H(x^*)$ est défini positif, alors
$$f(x) - f(\bar{x}) = \frac{1}{2}\, d^\top H(\bar{x}) d > 0 \Rightarrow f(x) > f(\bar{x})$$

4. Pour tout point $x \neq \bar{x}$ dans $\mathbb{R}^n$ la convexité de f permet d'écrire

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + g(\bar{x})^\top (x - \bar{x}),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

Si de plus on a $g(\bar{x}) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$, alors $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \geq f(\bar{x})$. Donc $\bar{x}$ est bien un minimum global.

■

Exercice 4 *Détailler la démonstration du théorème 1.4 du cours.*