Université Badji Mokhtar-Annaba, Département de Mathématiques

Série N°2 (Optimisation non linéaire)

Exercice 1 *Calculer le gradient $g(x)$ et le hessien g(x) de la fonction Rosenbrock*

$$f(x) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

Montrer que $x^* = (1\,,\,1)^T$ est le seul minimum local de cette fonction

Exercice 2 *Montrer que la fonction $f(x) = 8x_1 + 12x_2 + x_1^2 - 2x_2^2$ a un seul point stationnaire, et que ce n'est ni un maximum et ni un minimum, mais un point de selle. Croquiser les courbes à niveaux de f .*

Exercice 3 *Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \|x\|^2$. Montrer que la suite d'itérations $\{x_k\}$ définie par*

$$x_k = (1 + \frac{1}{2^k}) \begin{pmatrix} cos(k) \\ sin(k) \end{pmatrix}$$

satisfait $f(x_{k+1}) < f(x_k)$, $k = 1, 2, ...$que tout point sur le cercle unité $\{x : \|x\| = 1\}$ est un point limite de $\{x_k\}$. Astuce : Chaque valeur $\theta \in [0\,,\,2\pi]$ est un point limite de la sous-suite

$$\xi_k = k\,(mod\,2\pi) = k - 2\pi \left[\frac{k}{2\pi}\right]$$

où l'opérateur $[\,.\,]$ est la partie entière d'un réel.

Exercice 4 *Montrer que tous les minimas locaux isolés sont strictes.*

Exercice 5 *Supposons que f est une fonction convexe. Montrer que l'ensemble des minimas globaux de f est un ensemble convexe.*

Exercice 6 *Considérons la fonction $f(x_1\,,\,x_2) = (x_1 + x_2^2)^2$. Au point $x^T = (1\,,\,0)$, nous considérons la direction $d^T = (-1\,,\,1)$. Montrer que d est une direction de descente et trouver toutes les minimas du problème*

$$\min_{t>0} f(x + t\,d).$$

Exercice 7 *Supposons que* $\tilde{f}(z) = f(x)$*, où* $x = Sz + s$ *pour un certain* $S \in \mathbb{R}^{n\times m} = \mathcal{M}^{n\times m}$ *et* $s \in \mathbb{R}^n$*. Monter que*

$$\tilde{g}(z) = \nabla \tilde{f}(z) = S^T \nabla f(x), \ \ \tilde{H}(z) = \nabla^2 \tilde{f}(z) = S^T H(x) S$$

Exercice 8 *Montrer que la suite* $x_k = \dfrac{1}{k}$ *n'est pas convergente Q-linéairement vers* 0*.*

Exercice 9 *Montrer que la suite* $x_k = 1 + (0.5)^{2^k}$ *converge Q-qudratiquement vers* 1*.*

Exercice 10 *Est-ce que la suite* $\dfrac{1}{k!}$ *converge Q-superlinairement ? Q-quadratiquement ?*

Exercice 11 *Considérons la suite* $\{x_k\}$ *définie*

$$x_k = \begin{cases} (\frac{1}{4})^{2^k}, & k \text{ est pair} \\ \frac{x_{k-1}}{k}, & k \text{ est impaire} \end{cases}$$

Est-ce que la suite est Q-superlineairement convergente ? Q-quadratiquement convergente ? R-quadratiquement convergente ?