Université Badji Mokhtar-Annaba, Département de Mathématiques

Examen Final (Optimisation non linéaire)

Master 1 COTA, S1-2020/2021

Jeudi, le 01 Avril 2021, durée : 1 heure.

Exercice 1 (4 Pts) *On considère la fonction* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction f *est-elle continue sur* $\mathbb{R}^2$ *? de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *?*

Solution: La fonction f est C^∞ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ en tant que produit, quotient ne s'annulant pas de fonctions qui le sont. Reste à étudier la régularité en $(0,0)$. On a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, f(x,y) \leq \frac{|x|^3}{x^2} + \frac{|y|^3}{y^2} = |x| + |y| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

f est donc continue en $(0,0)$ $\boxed{2P^{ts}}$. En revanche, f n'est pas de classe C^1 en ce point car elle n'est même pas différentiable en $(0,0)$. En effet, soit $t \neq 0$ et $(x,y) \neq (0,0)$. On a

$$\frac{f(tx,ty) - f(0,0)}{t} = \frac{t^3(x^3+y^3)}{t^3(x^2+y^2)} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

Or, si f était différentiable en $(0,0)$, cette limite coïnciderait avec $df(x,y)|_{(x,y)=(0,0)}$ et serait en particulier linéaire par rapport à (x,y) ce qui n'est pas le cas. $\boxed{2P^{ts}}$

■

Exercice 2 (6 Pts) *Résoudre le problème d'optimisation sans contraintes*

$$\min_{x\in\mathbb{R}} f(x),$$

pour les fonctions réelles suivantes :

(a) $f : x \longmapsto x^3 + 2x^2$,

(b) $f : x \longmapsto 2x^3 + 5x^2 - x - 1$,

(c) $f : x \longmapsto 2x^4 + 5x^3 - x^2$.

Solution:

(a) Pour la fonction $f : x \longmapsto x^3 + 2x^2$, $f'(x) \equiv g(x) = 3x^2 + 4x$ et $f''(x) \equiv h(x) = 6x + 4$. Les point critiques de f sont solution de l'équation $g(x) = 0$, ce qui nous donne

$$x_1^* = 0 \text{ et } x_2^* = -\frac{4}{3}$$

de plus $h(x_1^*) = 4 > 0$ et $h(x_2^*) = -3 < 0$ donc (d'après les conditions suffisantes d'optimalité de second ordre) x_1^* est un minimum local pour f. $\boxed{2P^{ts}}$

(b) Pour la fonction $f : x \longmapsto 2x^3 + 5x^2 - x - 1$, $f'(x) \equiv g(x) = 6x^2 + 10x - 1$ et $f''(x) \equiv h(x) = 12x + 10$. Les point critiques de f sont solution de l'équation $g(x) = 0$, ce qui nous donne

$$x_1^* = -\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{31} \text{ et } x_2^* = -\frac{5}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{31}$$

de plus $h(x_1^*) = \sqrt{31} > 0$ et $h(x_2^*) = -\sqrt{31} < 0$ donc (d'après les conditions suffisantes d'optimalité de second ordre) x_1^* est un minimum local pour f. $\boxed{2P^{ts}}$

(c) Pour la fonction $f : x \longmapsto 2x^4 + 5x^3 - x^2$, $f'(x) \equiv g(x) = 8x^2 + 15x^2 - 2x$ et $f''(x) \equiv h(x) = 12x + 10$. Les point critiques de f sont solution de l'équation $g(x) = 0$, ce qui nous donne

$$x_1^* = 10,\ x_2^* = \frac{23}{2} \text{ et } x_3^* = -14$$

de plus $h(x_1^*) = 10 > 0$, $h(x_2^*) = \dfrac{23}{2} > 0$ et $h(x_3^*) = -14 < 0$ donc (d'après les conditions suffisantes d'optimalité de second ordre) x_1^* et x_2^* sont des minimas locaux pour f. $\boxed{2P^{ts}}$

■

Exercice 3 (10 Pts) *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par*

$$f(x, y) = x^2 - 8\,xy + \alpha\, y^2 + x - y;\ \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

.

1. *Écrire f sous la forme*
$$f(u) = u^T A u - b^T u;\ \ u \in \mathbb{R}^2,$$
où A est une matrice carrée dans $\mathbb{R}^2$ et $b \in \mathbb{R}^2$.
2. *Calculer le gradient g et le hessien h de f en fonction de A et b.*
3. *Pour quelles valeurs du paramètre α, la direction $d = A^{-1}g(u)$ est une direction de descente ?*
4. *Déterminer les point critiques de f, est préciser en fonction de α leurs natures (minimum local/global, maximum local/global, point-selle, ...).*

Solution: .

1.
$$f(u) = u^T A u - b^T u = \frac{1}{2} u^T (2A) u + (-b)^T u;\ \ u \in \mathbb{R}^2,$$
avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ et $b = (-1, 1)^T$. $\boxed{3P^{ts}}$

2. Comme f peut être écrite sous la forme $f(u) = \frac{1}{2}u^T(2A)u + (-b)^T u;\ u \in \mathbb{R}^2$, alors $g(x,y) = \frac{1}{2}(2A+2A^T)(x,y)^T - b^T = (A+A^T)(x,y)^T - b^T = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 8 & 2\alpha \end{pmatrix}(x,y)^T - b^T = (2x-8y+1, -8x+2\alpha y-1)^T$ et $h(x,y) = \frac{1}{2}(2A+2A^T) = A+A^T = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -8 & 2\alpha \end{pmatrix}$. $\boxed{4P^{ts}}$

3. $d = A^{-1}g(u)$ est une direction de déscente si $\left(A^{-1}g(u)\right)^T g(u) < 0$. Puisque $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{\alpha} \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}$, les valeurs propres de A^{-1} sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 1/\alpha$. Puique $\lambda_1 > 0$, alors pour tout $\alpha > 0$, A^{-1} est définie positive. Si $\alpha < 0$ alors A^{-1} est indéfinie. $\boxed{1P^{ts}}$

4. $g(x,y) = (0,0)^\top \Leftrightarrow (x^*,y^*) = \frac{1}{2}\left(\frac{-4+\alpha}{-16+\alpha}, \frac{3}{-16+\alpha}\right)$. Maintenant, puisque

$$h(x^*,y^*) = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -8 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

les valeurs propres de cette matrice sont $\lambda_1 = 1+\alpha+\sqrt{65-2\,\alpha+\alpha^2}$ et $\lambda_1 = 1+\alpha-\sqrt{65-2\,\alpha+\alpha^2}$qui sont positives pour $\alpha > 16$, donc $h(x^*,y^*)$ est définit positive pour $\alpha > 16$, donc (x^*,y^*) est un minimum local strict pour f si $\alpha > 16$. $\boxed{3P^{ts}}$

■