Chapitre 5

Méthodes Quasi-Newton

Méthodes Quasi-Newton

5.1 Motivation

On s'intéresse à la résolution du problème d'optimisation non-linéaire sans contraintes (P), en utilisant des algorithmes à direction de descente

$$x_{k+1} = x_k + t_k d_k,$$

où le pas t_k est calculé par une recherche linéaire effectuée le long d'une direction de descente d_k . Dans les méthodes de quasi-Newton cette direction est donnée par la formule

$$d_k = -B_k^{-1}g(x_k). \quad (5.1)$$

Si $B_k = H(x_k)$ (le hessien de f en x_k) on retrouve l'algorithme de Newton. Pour certains problèmes, on cherche à éviter le calcul du hessien ainsi que son inverse car

- Ce calcul demande trop de temps à l'exécution,
- On ne dispose pas de dérivées secondes, et leur calcul est très coûteux,

- La fonction objective n'est pas deux fois dérivable.

L'idée est de remplacer la matrice hessienne $H(x_k)$ (ou son inverse) par une suite d'approximations $\{B_k\}$ symétriques définies positives, que l'on met à jour à chaque itération, impliquant seulement des évaluations de la fonction objective ainsi que ses dérivées premières, c'est-à-dire

$$B_{k+1} = W(B_k, x_k, f(x_k), g(x_k)) \approx H(x_{k+1}).$$

5.2 Principes d'obtention des formules de mise à jour

Supposons que B_k est connue et construisons son successeur B_{k+1} qui doit être une approximation de la matrice $H(x_{k+1})$. Ceci est motivé par le désir de donner à l'algorithme une convergence locale rapide (selon le théorème 4.1).

Dans toute la suite, nous noterons

$$\delta_k = x_{k+1} - x_k \quad \text{et} \quad \gamma_k = g(x_{k+1}) - g(x_k). \quad (5.2)$$

La formule (1.6) réécrite,

$$\gamma_k = \left(\int_0^1 H(x_k + t\delta_k) dt \right) \delta_k. \quad (5.3)$$

Pour que B_{k+1} soit proche de $H(x_{k+1})$ il est naturel qu'elle doit vérifier l'équation (5.3) (au moins sa valeur moyenne entre x_k et x_{k+1}), c'est-à-dire l'équation dite de "quasi-Newton"

$$\gamma_k = B_{k+1} \delta_k. \quad (5.4)$$

Si $n = 1$: Avec $B_0 = 1$, on retrouve la formule de la sécante (régula-falsi)

Si $n > 1$: L'équation matricielle (5.4) à $n \times n$ inconnues et elle ne fournit que n équations linéaires,

- Comme le hessien est symétrique, on impose la symétrie pour B_{k+1} (ce qui est logique pour que $B_{k+1} \approx H(x_{k+1})$), donc il reste $n^2 - \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$ inconnues, ce qui laisse le choix pour une infinité de matrices "quasi-Newton"
- En se donnant une matrice initiale B_0 (par exemple $B_0 = I$, la matrice identité), et on construit une suite de matrices $\{B_k\}$, par la relation

$$B_{k+1} = B_k + C_k,$$

où C_k est une matrice facile à calculer.

5.2.1 Formules de Correction de rang un (SR1)

Puisque la matrice hessienne est symétrique il est souhaitable que l'approximation qu'on construit le soit également. Ceci est possible si on utilise une formule de mise à jour de la forme

$$B_{k+1} = B_k + a_k u_k u_k^\top, \quad (5.5)$$

avec u_k un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et a_k une constante. On note que la matrice $u_k u_k^\top$ est symétrique puisque $(u u^\top)^\top = u u^\top$ et elle est de rang un car elle est le produit de deux matrices de rang un. Il est facile de calculer a_k et u_k explicitement.

La matrice (5.5) doit vérifier l'équation de quasi-Newton (5.4), donc

$$\gamma_k = (B_k + a_k u_k u_k^\top) \delta_k \Rightarrow \gamma_k - B_k \delta_k = a_k u_k (u_k^\top \delta_k).$$

- Si $\gamma_k - B_k \delta_k = 0$, alors $B_{k+1} = B_k$
- Si $\gamma_k - B_k \delta_k \neq 0$, en prenant $a_k = \frac{1}{u_k^\top \delta_k}$, on a $u_k = \gamma_k - B_k \delta_k$, on remplace dans (5.5) pour trouver

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(\gamma_k - B_k \delta_k)(\gamma_k - B_k \delta_k)^\top}{(\gamma_k - B_k \delta_k)^\top \delta_k}, \quad (5.6)$$

qui est la formule de mise à jour SR1 (Symetric Rank 1 [4]).

Remarque 5.1. Supposons qu'au lieu de B_{k+1} , on veut calculer $S_{k+1} \equiv (B_{k+1})^{-1}$, destinée à approcher $H^{-1}(x_{k+1})$, alors S_{k+1} doit vérifier l'équation "quasi-Newton" dite "duale"

$$S_{k+1}\gamma_k = \delta_k. \quad (5.7)$$

En intervertissant γ_k et δ_k dans le raisonnement qui précède, on trouve

$$S_{k+1} = S_k + \frac{(\delta_k - S_k\gamma_k)(\delta_k - S_k\gamma_k)^\top}{(\delta_k - S_k\gamma_k)^\top \gamma_k}, \quad (5.8)$$

qui est la formule duale de (5.6)

Algorithme 5.1.

Etape 0 (Initialisation) : x_0 et $\varepsilon > 0$ donnée, $S_0 = I$, $k = 0$

Etape1 : Test d'arrêt : calculer $g(x_k)$, si $\|g(x_k)\| < \varepsilon$, alors stop sinon

Etape 2 : Calcul de la direction d_k :

$$d_k = -S_k g(x_k),$$

Etape3 : Recherche linéaire ; trouver t_k solution du problème $\min_{t>0} f(x_k + td_k)$

Etape 4 : Si la recherche linéaire réussie ; $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$

Calculer S_{k+1} d'après la formule (5.8)

Etape 5 : Remplacer k par $k + 1$ et aller en 1.

Proposition 5.1. Si f est une fonction quadratique de hessien symétrique Q et si $\delta_0, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}$ (définis en (5.2) et générés par l'algorithme 5.1), sont linéairement indépendants, alors,

$$B_n = Q.$$

Démonstration.

Démontrons par récurrence sur k , que si l'équation (5.4) est vérifiée, alors

$$\gamma_i = B_{k+1} \delta_i, \forall i \leq k-1. \quad (5.9)$$

Pour $k = 0$ la relation est vraie d'après (5.9).

Supposons que (5.9) est vraie pour $k > 0$ et démontrons quelle reste vraie pour $k + 1$, d'après (5.6) on a

$$B_{k+1} \delta_i = B_k \delta_i + \frac{(\gamma_k - B_k \delta_k)(\gamma_k - B_k \delta_k)^\top \delta_i}{(\gamma_k - B_k \delta_k)^\top \delta_k}.$$

Grâce à l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$(\gamma_k - B_k \delta_k)^\top \delta_i = \gamma_k^\top \delta_i - \delta_k^\top B_k \delta_i = \gamma_k^\top \delta_i - \delta_k^\top \gamma_i$$

et puisque f est quadratique alors, $Q\delta_i = \gamma_i$, donc

$$(\gamma_k - B_k\delta_k)^\top \delta_i = \gamma_k^\top \delta_i - \delta_k^\top Q\delta_i = \gamma_k^\top \delta_i - (Q\delta_k^\top)\delta_i = \gamma_k^\top \delta_i - \gamma_k^\top \delta_i = 0,$$

ce qui donne

$$B_{k+1}\delta_i = B_k\delta_i + 0 = \gamma_i, \forall i \leq k-1.$$

Et d'après (5.4), on peut conclure (5.9), et qui peut être réécrite (avec $k = n$) comme suite :

$$B_n\Delta = \Gamma,$$

où, $\Delta = [\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{n-1}]$ et $\Gamma = [\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}]$. On vérifie aussi

$$Q\Delta = \Gamma,$$

donc

$$Q\Delta = B_n\Delta \Rightarrow Q = B_n.$$

Puisque f est quadratique de matrice Q , c'est-à-dire

$$f(x) = \frac{1}{2}x^\top Qx - b^\top x + c, \quad b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R},$$

la condition nécessaire d'optimalité est

$$Qx^* - b = 0 \Rightarrow x^* = Q^{-1}b = S_nb.$$

□

Exemple 5.1. *Considérons le problème quadratique à matrice symétrique définie positive suivant*

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2}x^\top Qx \\ x \in \mathbb{R}^4, \end{cases}$$

où

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Appliquons la méthode SR1 avec une recherche linéaire exacte sur ce problème, en prenant $\varepsilon = 10^{-5}$, $x_0 = (0, 1, 2, 3)$. Les résultats sont illustrés au tableau 5.1 Les matrices S_k , générées par

k	x_k	$f(x_k)$	$\ g(x_k)\ $	t_k
0	(0.000, 1.000, 2.000, 3.000)	15.0	10.440	0.255
1	(-0.511, -1.046, 0.720, 1.976)	1.055	1.057	1.594
2	(-0.8725151, -0.4783924, 0.8245462, 0.4503025)	0.175	0.343	0.715
3	(-0.8517367, -0.3053396, 0.5705029, 0.3856921)	0.124	0.295	8.954
4	(0.000, 0.000, 0.000)	0.000	0.000	-

Tableau 5.1

L'algorithme SR1 sont

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0.980 & -0.099 & -0.059 & -0.031 \\ -0.099 & 0.502 & -0.298 & -0.159 \\ -0.059 & -0.298 & 0.820 & -0.095 \\ -0.031 & -0.159 & -0.095 & 0.949 \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0.994 & -0.159 & -0.017 & 0.055 \\ -0.159 & 0.760 & -0.478 & -0.533 \\ -0.017 & -0.478 & 0.946 & 0.165 \\ 0.055 & -0.533 & 0.165 & 1.492 \end{pmatrix}$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} 0.4128 & 0.072 & -0.267 & 0.171 \\ 0.072 & 0.667 & -0.378 & -0.580 \\ -0.267 & -0.378 & 0.839 & 0.215 \\ 0.171 & -0.580 & 0.215 & 1.469 \end{pmatrix} \quad S_4 = \begin{pmatrix} 3.000 & 1.000 & -2.000 & -1.000 \\ 1.000 & 1.000 & -1.000 & -1.000 \\ -2.000 & -1.000 & 2.000 & 1.000 \\ -1.000 & -1.000 & 1.000 & 2.000 \end{pmatrix}$$

Avantages Dans le cas d'une fonction quadratique et sous les hypothèses de la proposition 5.1, l'algorithme SR1, converge en n itérations.

Inconvénients Même si f est une fonction quadratique à matrice définie positive. La présence du terme $(\delta_k - S_k \gamma_k)^\top \gamma_k$ dans le dénominateur de (5.8) constitue le point faible de la méthode SR1 :

- Si $(\delta_k - S_k \gamma_k)^\top \gamma_k < 0$ la descente n'est pas assurée.
- Si $(\delta_k - S_k \gamma_k)^\top \gamma_k \simeq 0$ le procédé est numériquement instable.

Ce qui fait que cette méthode est rarement utilisé comme algorithme d'optimisation, même si des résultats numériques satisfaisants sont obtenus avec des algorithmes contenant des barrières de sécurité ([14]). Cependant les travaux de Griewank et Toint ([17]) ont donné un intérêt croissant pour cette méthode grâce à son utilisation en complémentaire avec des algorithmes plus développés tel DFP et BFGS.

5.2.2 Formules de Davidon-Fletcher-Powel (DFP)

Nous avons démontré dans le théorème 3.1 que pour avoir une vitesse de convergence super-linéaire il est nécessaire que B_k soit asymptotiquement proche de la matrice hessienne, une approche est faite avec la méthode de correction de rang un, mais on a vu que cette méthode présente plusieurs inconvénient. Un algorithme plus efficace est proposé par Davidon (1959,[9]), développé et popularisé par Fletcher et Powel (1963, [13]) , sous le nom de "Méthodes à métrique variable". Elle consiste à une mise à jour de l'inverse du hessien par une correction de rang au plus égale à deux, incorporant plus d'informations sur la courbure de la fonction objective c'est-à-dire

$$S_{k+1} = S_k + a_k u_k u_k^\top + b_k v_k v_k^\top, \quad (5.10)$$

avec a_k, b_k des constantes réels, u_k, v_k des vecteur dans $\mathbb{R}^n$ et S_{k+1} qui doit satisfaire l'équation "quasi-Newton" (5.7).

Un raisonnement analogue à celui de la méthode SR1 et en prenant

$$a_k = \frac{1}{u_k^\top \gamma_k}, b_k = -\frac{1}{v_k^\top \delta_k}, u_k = \delta_k, v_k = S_k \gamma_k,$$

remplacer dans (5.10), on trouve la formule de mis à jours DFP :

$$S_{k+1} = S_k + \frac{\delta_k \delta_k^\top}{\gamma_k^\top \delta_k} - \frac{S_k \gamma_k \gamma_k^\top S_k}{\gamma_k^\top S_k \gamma_k}. \quad (5.11)$$

Remarque 5.2.

1. Considérons la formule (5.11), si on pose

$$C_k = \frac{\delta_k \delta_k^\top}{\gamma_k^\top \delta_k} - \frac{S_k \gamma_k \gamma_k^\top S_k}{\gamma_k^\top S_k \gamma_k},$$

on a

$$B_{k+1} = S_{k+1}^{-1} = (S_k + C_k)^{-1}.$$

En appliquant deux fois la formule de Sherman-Morrisson-Woodbury [2]

$$(A + ab^\top)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}ab^\top A^{-1}}{1 + b^\top A^{-1}a},$$

avec $b^\top A^{-1}a \neq -1$ et $A \in \mathcal{M}_n$ inversible, on obtient

$$B_{k+1} = B_k + \left(1 + \frac{\delta_k^\top B_k \delta_k}{\gamma_k^\top \delta_k}\right) \frac{\gamma_k^\top \gamma_k}{\gamma_k^\top \delta_k} - \frac{\gamma_k \delta_k^\top B_k + B_k \delta_k \gamma_k^\top}{\gamma_k^\top \delta_k}. \quad (5.12)$$

Si on remarque que

$$\left(I - \frac{\gamma_k \delta_k^\top}{\gamma_k^\top \delta_k}\right) B_k \left(I - \frac{\delta_k \gamma_k^\top}{\gamma_k^\top \delta_k}\right) = B_k - \frac{\gamma_k \delta_k^\top B_k + B_k \delta_k \gamma_k^\top}{\gamma_k^\top \delta_k} + \frac{(\delta_k^\top B_k \delta_k) \gamma_k^\top \gamma_k}{(\gamma_k^\top \delta_k)^2},$$

on peut donner une autre écriture à la formule précédente

$$B_{k+1} = \left(I - \frac{\gamma_k \delta_k^\top}{\gamma_k^\top \delta_k}\right) B_k \left(I - \frac{\delta_k \gamma_k^\top}{\gamma_k^\top \delta_k}\right) + \frac{\gamma_k^\top \gamma_k}{\gamma_k^\top \delta_k}. \quad (5.13)$$

2. Il est facile de montrer que si B_0 est symétrique, alors B_k l'est aussi.
3. Pour que la direction définie par (5.1) soit une direction de descente, Il faut et il suffit que B_k générée par la formule (5.13), soit définie positive.

Proposition 5.2. Si B_k est définie positive et si $\gamma_k^\top \delta_k > 0$, alors B_{k+1} est définie positive.

Démonstration.

Soit $u \in \mathbb{R}_*^n$

$$\begin{aligned} u^\top B_{k+1} u &= u^\top \left(I - \frac{\gamma_k \delta_k^\top}{\gamma_k^\top \delta_k} \right) B_k \left(I - \frac{\delta_k \gamma_k^\top}{\gamma_k^\top \delta_k} \right) u + u^\top \frac{\gamma_k^\top \gamma_k}{\gamma_k^\top \delta_k} u, \\ &= v^\top B_k v + \frac{(u^\top \gamma_k)^2}{\delta_k^\top \gamma_k}, \quad v = \left(I - \frac{\delta_k \gamma_k^\top}{\gamma_k^\top \delta_k} \right) u, \end{aligned}$$

qui est une somme de termes positifs, par hypothèse B_k est définie positive, donc si $v^\top B_k v = 0$, alors $v = 0$ ce qui implique que $u = \alpha \delta_k$ (u colinéaire avec δ_k), donc $\frac{(u^\top \gamma_k)^2}{\delta_k \gamma_k} = \alpha^2 \frac{(\delta_k^\top \gamma_k)^2}{\delta_k \gamma_k} > 0 \Rightarrow u^\top B_{k+1} u^\top = 0 + \alpha^2 \frac{(\delta_k^\top \gamma_k)^2}{\delta_k \gamma_k} > 0$.

□

Remarque 5.3. On note que l'inégalité $\gamma_k^\top \delta_k > 0$ est vérifiée si on utilise une recherche linéaire exacte ou de type Wolfe, en effet : $\gamma_k^\top \delta_k = (g(x_{k+1}) - g(x_k))^\top \delta_k = -g(x_k)^\top \delta_k > 0$ puisque si la recherche linéaire est exacte, alors $g(x_{k+1})^\top \delta_k = 0$ Si la recherche linéaire est de Wolfe c'est-à-dire, on a les deux inégalités

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) \leq m_1 t_k g(x_k)^\top d_k, \quad (5.14)$$

$$g(x_{k+1})^\top d_k \geq m_2 g(x_k)^\top d_k, \quad (5.15)$$

$$\gamma_k^\top \delta_k = (g(x_{k+1}) - g(x_k))^\top \delta_k = t_k (g(x_{k+1})^\top d_k - g(x_k)^\top d_k),$$

de (5.15) on a $g(x_{k+1})^\top d_k \geq m_2 g(x_k)^\top d_k > g(x_k)^\top d_k$ puisque $m_2 \in]0, 1[$ et $g(x_k)^\top d_k < 0$, donc

$$\gamma_k^\top \delta_k = t_k (g(x_{k+1})^\top d_k - g(x_k)^\top d_k) > 0, \quad (5.16)$$

puisque si $g(x_{k+1})^\top d_k \geq 0$, (5.16) est la somme de positives et si $g(x_k)^\top d_k < g(x_{k+1})^\top d_k \leq 0$, (5.16) reste vérifié.

Algorithme 5.2.

Etape 0 (Initialisation) : x_0 et $\varepsilon > 0$ donnée, $S_0 = I$, $k = 0$.

Etape 1 : Test d'arrêt : calculer $g(x_k)$, si $\|g(x_k)\| < \varepsilon$ alors stop sinon,

tape 2 : Calcul de la direction d_k :

$$d_k = -S_k g(x_k),$$

Etape 3 : Recherche linéaire, trouver t_k solution du problème $\min_{t>0} f(x_k + td_k)$,

Etape 4 : Si la recherche linéaire réussie, $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$,

Calculer S_{k+1} d'après la formule (5.11),

Etape 5 : Remplacer k par $k + 1$ et aller en 1.

Dans la pratique et pour des raisons de convergence, il est préférable de réinitialiser l'algorithme après n itérations de l'algorithme.

Définition 5.1. Soit Q une matrice Symétrique définie positive, la famille de vecteurs $d_0, d_1, \dots, d_n$ sont dite Q -conjugués si

$$d_i^\top Q d_j = 0, \text{ pour } i \neq j.$$

On remarque que dans ce cas les vecteurs $d_0, d_1, \dots, d_{n-1}$ sont libre.

Application On veut minimiser une fonction quadratique, à matrice définie positive, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ f(x) = \frac{1}{2} x^\top Q x - b^\top x, b \in \mathbb{R}^n, Q \text{ est une matrice définie positive.} \end{cases} \quad (5.17)$$

Lemme 5.1. Si $d_0, d_1, \dots, d_{n-1}$, sont des vecteurs Q -conjugués, et soit t_k la solution optimal du problème $\min \{f(x_k + td_k) : t > 0\}$ associé à l'algorithme : $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$ pour $k = 0, 1, \dots$ avec $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un vecteur arbitraire, alors la solution de (5.14) est le vecteur x_{n+1} .

Seulement il faut qu'on dispose de n vecteurs Q -conjugués.

Théorème 5.1 ([2]). Soit le problème d'optimisation sans contraintes quadratique (5.17), si les suites $\{S_i\}, \{\delta_i\}$, sont engendrées par l'algorithme (5.2), alors à l'étape k de l'algorithme on a

$$(i) \delta_i^T Q \delta_j = 0, \quad 0 \leq i < j \leq k - 1,$$

$$(ii) S_{k+1} Q \delta_i = 0, \quad 0 \leq i \leq k - 1.$$

De plus, $S_{n+1} = Q^{-1}$ et la solution de (5.17) est obtenue après n itérations.

Exemple 5.2. On traite le même problème que dans l'exemple 5.1, en appliquant l'algorithme DFP avec une recherche linéaire exacte, les résultats sont donnés dans le tableau 5.2.

k	x_k	$f(x_k)$	$\ g(x_k)\ $	t_k
0	(0.000, 1.000, 2.000, 3.000)	14.0	10.440	0.255
1	(-0.511, -1.046, 0.720, 1.976)	1.055	1.057	1.588
2	(-0.8725151, -0.4783924, 0.8245462, 0.4503025)	0.175	0.343	0.965
3	(-0.8517367, -0.3053396, 0.5705029, 0.3856921)	0.124	0.295	5.19
4	(0.000, 0.000, 0.000)	0.000	0.000	—

Tableau 5.2

Les matrices S_k , générées par l'algorithme DFP sont

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0.980 & -0.099 & -0.059 & -0.031 \\ -0.099 & 0.502 & 0.298 & -0.160 \\ -0.059 & -0.298 & 0.820 & -0.095 \\ -0.031 & -0.160 & -0.095 & 0.951 \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0.992 & -0.172 & 0.0005 & 0.059 \\ -0.172 & 0.654 & -0.323 & -0.494 \\ 0.0005 & -0.323 & 0.719 & 0.107 \\ 0.059 & -0.494 & 0.107 & 1.478 \end{pmatrix}$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} 0.648 & 0.157 & -0.425 & 0.064 \\ 0.157 & 0.697 & -0.435 & -0.618 \\ -0.425 & -0.435 & 0.945 & 0.286 \\ 0.064 & -0.618 & 0.286 & 1.517 \end{pmatrix} \quad S_4 = \begin{pmatrix} 3.000 & 1.000 & -2.000 & -1.000 \\ 1.000 & 1.000 & -1.000 & -1.000 \\ -2.000 & -1.000 & 2.000 & 1.000 \\ -1.000 & -1.000 & 1.000 & 2.000 \end{pmatrix}$$

5.2.3 Avantages et inconvénients de la méthode DFP

- Pour le cas d'une fonction quadratique strictement convexe l'algorithme 5.2 converge au plus en n itérations, tout en engendrant des directions conjuguées.
- Ce résultat ne peut être généralisé pour les fonctions non quadratiques, cependant Powell (1971, [34]), a montré la convergence globale de la méthode DFP dans le cas

d'une fonction strictement convexe deux fois différentiable et utilisant une recherche linéaire exacte.

- Numériquement la méthode DFP est très sensible à la précision de la recherche linéaire.
- Dans le cas d'une recherche linéaire inexacte, la convergence de la méthode DFP reste un problème ouvert [34].

5.2.4 Formules de Broyden-Fletcher-Goldfabr-Shanno (BFGS)

Si B_k est une approximation de la matrice hessienne, B_{k+1} doit être la matrice la plus proche dans un sens où elle doit vérifier les contraintes ci-dessus, ce qui nous ramène à un problème d'optimisation avec contraintes en la variable matricielle $B \in \mathcal{M}_n$ [10, 19].

$$\begin{cases} \min \Phi(B, B_k), \\ \gamma_k = B\delta_k \text{ (équation de quasi-Newton)}, \\ B = B^\top \text{ (condition de symétrie)}, \end{cases} \quad (5.18)$$

où, $\Phi : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}^+$ définit l'écart entre B et B_k . Pour que la direction (5.1) soit une direction de descente on impose la définie positivité des matrices B_k . Afin que la solution de (5.18) vérifie cette propriété, il ne suffit pas d'ajouter cette contrainte au problème. En effet, le cône $\mathcal{C}_n^0$ des matrices symétriques définies positives est un convexe ouvert de $\mathcal{M}_n$, dans ces conditions le problème (5.18) peut ne pas avoir de solutions. On va chercher à ce que la fonction Φ qui impose la définie positivité de la matrice solution.

R.H. Byrd et J. Nocedal (1989, [6]), ont introduit une fonction $\psi : \mathcal{C}_n^0 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\psi(M) = \text{Tr}(M) - \ln(\det(M)),$$

puisque $M \in \mathcal{C}_n^0$, on peut voir ψ autrement

$$\psi(M) = \sum_{\lambda_i \in \sigma(M)} (\lambda_i - \ln(\lambda_i)). \quad (5.19)$$

Cette fonction forme une barrière au bord du cône $\mathcal{C}_n^0$, (comme on peut le voir sur la fonction, $t \rightarrow t - \ln(t)$ définie sur $\mathbb{R}_*^+$), donc ψ tend vers l'infini si l'une des valeurs propres de M tend vers zéro ou vers l'infini. Une analyse de la formule (5.19) montre que ψ atteint son unique minimum en $M^* = I$, alors pour minimiser l'écart entre B et B_k , on peut chercher à ce que $B B_k^{-1} = B_k^{-1/2} B B_k^{-1/2}$ soit proche de I , ceci est obtenu en minimisant la fonction $\psi(B_k^{-1/2} B B_k^{-1/2})$. Ce qui revient à résoudre dans l'espace $\mathcal{M}_n$ le problème suivant

$$\begin{cases} \min \psi(B_k^{-1/2} B B_k^{-1/2}), \\ \gamma_k = B \delta_k, \\ B = B^\top. \end{cases} \quad (5.20)$$

Cas 1 : $\delta_k = 0$

Si $\gamma_k \neq 0$, l'équation $\gamma_k = B \delta_k$ n'a pas de solution (l'ensemble admissible est vide).

Si $\gamma_k = 0$, alors B_k appartient à l'ensemble admissible, donc solution de (5.20) (puisque $B_k^{-1/2} B_k B_k^{-1/2} = I$).

Cas 2 : $\delta_k \neq 0$, on a la proposition suivante

Proposition 5.3. *Supposons que B_k soit symétrique, définie positive et que $\delta_k \neq 0$. Alors, le problème (5.20) a une solution si et seulement si $\gamma_k^\top \delta_k > 0$. Sous cette condition la solution B_{k+1} de (5.20) est unique et elle est donnée par l'une des formules suivantes*

$$B_{k+1} = B_k + \frac{\gamma_k \gamma_k^\top}{\gamma_k^\top \delta_k} - \frac{B_k \delta_k \delta_k^\top B_k}{\delta_k^\top B_k \delta_k}, \quad (5.21)$$

$$B_{k+1}^{-1} = B_k^{-1} + \frac{(\delta_k - B_k^{-1} \gamma_k) \delta_k^\top + \delta_k (\delta_k - B_k^{-1} \gamma_k)^\top}{\gamma_k^\top \delta_k} - \frac{\gamma_k^\top (\delta_k - B_k^{-1} \gamma_k)}{(\gamma_k^\top \delta_k)^2} \delta_k \delta_k^\top, \quad (5.22)$$

Démonstration.

Si $B_{k+1} \in \mathcal{C}_n^0$ est une solution de (5.20), alors, $\gamma_k^\top \delta_k = \delta_k^\top B_{k+1} \delta_k > 0$ (condition nécessaire). Supposant que $\gamma_k^\top \delta_k > 0$ et montrons que (5.20) admet une solution unique. Pour cela commençant par montrer que la fonction matricielle ψ est strictement convexe. On peut montrer que pour une matrice inversible $M \in \mathcal{C}_n^0$,

$$\det'(M, D) = \det'(M) \cdot D = \det(M) \cdot \text{Tr}(M^{-1}D), \quad \forall D \in \mathcal{M}_n,$$

où, $\det'(M; D)$ est la dérivée directionnelle de $\det(\cdot)$ en A suivant D , donc $\forall D \in \mathcal{M}_n$ on a

$$\psi'(M) \cdot D = \text{Tr}(D) - \text{Tr}(M^{-1}D),$$

$$D^\top \cdot \psi''(M) \cdot D = \text{Tr}[(M^{-1}D)(DM^{-1})] > 0,$$

donc $\psi''(M)$ est définie positive. Calculons explicitement B_{k+1} la solution de (5.20)

$$\begin{cases} \min \psi(B_k^{-1/2} B B_k^{-1/2}), \\ \gamma_k - B \delta_k = 0, \\ B - B^\top = 0. \end{cases} \quad (5.23)$$

Les conditions d'optimalité du première ordre pour le problème (5.23) (théorème des multiplicateurs de Lagrange [2]), il existe des vecteurs $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathcal{M}_n$ (vecteurs des multiplicateurs de Lagrange), tels que, $\forall D \in \mathcal{M}_n$ on a

$$\psi'(B_k^{-1/2} B B_k^{-1/2})D + (\alpha^\top (\gamma_k - B \delta_k))'D + \text{Tr}'(\mu^\top (B - B^\top))D = 0.$$

Donc B est l'annulateur de la dérivée directionnelle du Lagrangien associé au problème (5.23), ce qui donne

$$\text{Tr}(B_k^{-1}D) - \text{Tr}((B_k B^{-1})(D B_k^{-1})) - \alpha^\top D \delta_k + \text{Tr}(\mu^\top (D - D^\top)) = 0,$$

la fonction $Tr(\cdot)$ est linéaire et $Tr(\delta_k \alpha^\top D) = \alpha^\top D \delta_k$ donc

$$Tr \left(B_k^{-1} D - (B_k B^{-1})(D B_k^{-1}) - \delta_k \alpha^\top D + \mu^\top D - \mu D \right) = 0.$$

Ceci est pour $\forall D \in \mathcal{M}_n$, ce qui permet d'écrire

$$B^{-1} = B_k^{-1} - \delta_k \alpha^\top + \mu^\top - \mu.$$

La symétrie de B^{-1} et B_k^{-1} donne

$$B^{-1} = B_k^{-1} - \alpha \delta_k^\top + \mu - \mu^\top.$$

Ce qui permet d'éliminer le multiplicateur μ donc

$$B^{-1} = B_k^{-1} - \frac{\delta_k \alpha^\top + \alpha \delta_k^\top}{2}. \quad (5.24)$$

L'équation quasi-Newton donne

$$\delta_k = B_k^{-1} \gamma_k - \frac{(\gamma_k^\top \alpha) \delta_k + (\gamma_k^\top \delta_k) \alpha}{2}. \quad (5.25)$$

Le produit scalaire avec γ_k

$$\begin{aligned} \gamma_k^\top \delta_k &= \gamma_k^\top B_k^{-1} \gamma_k - \frac{(\gamma_k^\top \alpha) \gamma_k^\top \delta_k + (\gamma_k^\top \delta_k) \gamma_k^\top \alpha}{2}, \\ \Rightarrow \gamma_k^\top \alpha &= \frac{\gamma_k^\top (B_k^{-1} \gamma_k - \delta_k)}{\gamma_k^\top \delta_k}, \end{aligned}$$

remplacer dans (5.25), on trouve la valeur du multiplicateur

$$\alpha = \frac{-2(\delta_k - B_k^{-1} \gamma_k)}{\gamma_k^\top \delta_k} + \frac{\gamma_k^\top (\delta_k - B_k^{-1} \gamma_k) \delta_k}{(\gamma_k^\top \delta_k)^2}.$$

On calcul en suite $\delta_k \alpha^\top$ et $\alpha \delta_k^\top$

$$\delta_k \alpha^\top = \frac{-2\delta_k(\delta_k - B_k^{-1}\gamma_k)^\top}{\gamma_k^\top \delta_k} + \frac{(\gamma_k^\top(\delta_k - B_k^{-1}\gamma_k))\delta_k \delta_k^\top}{(\gamma_k^\top \delta_k)^2},$$

et

$$\alpha \delta_k^\top = \frac{-2(\delta_k - B_k^{-1}\gamma_k)\delta_k^\top}{\gamma_k^\top \delta_k} + \frac{\gamma_k^\top(\delta_k - B_k^{-1}\gamma_k)\delta_k \delta_k^\top}{(\gamma_k^\top \delta_k)^2},$$

donc

$$\delta_k \alpha^\top + \alpha \delta_k^\top = \frac{-2[\delta_k(\delta_k - B_k^{-1}\gamma_k)^\top - (\delta_k - B_k^{-1}\gamma_k)\delta_k^\top]}{\gamma_k^\top \delta_k} + 2\frac{(\gamma_k^\top(\delta_k - B_k^{-1}\gamma_k))\delta_k \delta_k^\top}{(\gamma_k^\top \delta_k)^2}.$$

On remplace dans (5.24) pour trouver (5.22), par un calcul mécanique, on retrouve (5.21), (en utilisant le fait que $BB^{-1} = I$).

□

Cette formule a été développée indépendamment, par Broyden (1970, [4]), Fletcher (1970, [12]), Goldfarb (1970, [16]) et Shanno (1969, [38]).

Algorithme 5.3. *L'algorithme BFGS est le même que celui de DFP, seulement pour calculer S_{k+1} , on utilise la formule (5.22).*

Remarque 5.4.

- Si on note $S_k \equiv B_k^{-1}$ et en développant (5.22), on trouve

$$S_{k+1} = S_k + \frac{\delta_k \delta_k^\top}{\gamma_k^\top \delta_k} - \frac{\delta_k \gamma_k^\top S_k + S_k \gamma_k \delta_k^\top}{\gamma_k^\top \delta_k} + \frac{(\gamma_k^\top S_k \gamma_k)\delta_k \delta_k^\top}{(\gamma_k^\top \delta_k)^2} \quad (5.26)$$

et en adoptant le raisonnement effectué dans la remarque 4.2, on aboutit à la formule

$$S_{k+1} = \left(I - \frac{\delta_k \gamma_k^\top}{\gamma_k^\top \delta_k}\right) S_k \left(I - \frac{\gamma_k \delta_k^\top}{\gamma_k^\top \delta_k}\right) + \frac{\delta_k \delta_k^\top}{\gamma_k^\top \delta_k} \quad (5.27)$$

Si on compare (5.11) et (5.21) puis (5.13) et (5.27) on déduit que les formules DFP et BFGS

sont duales l'une de l'autre.

- Si S_k est définie positive et $\gamma_k^\top \delta_k > 0$, la matrice S_{k+1} l'est aussi, pour la démonstration on utilise la remarque précédente, la proposition 5.3 et le fait qu'une matrice est définie positive si et seulement si son inverse l'est aussi. Dans ce cas l'algorithme BFGS est bien définie, seulement on ne peut pas garantir la condition $\gamma_k^\top \delta_k > 0$ à cause des erreurs d'arrondis dû à la précision des machines.
- Appliquée l'algorithme BFGS sur une fonction f quadratique à matrice Q définie positive, la solution du problème (5.17) est obtenue au plus n itérations et S_{n+1} est l'inverse de Q .
- Dans le cas d'une fonction non-linéaire, et pour des raisons de convergence il faut procéder à des réinitialisations périodiques (par exemple à chaque n itérations [14, 29]).
- L'unanimité des spécialistes semble se faire sur la supériorité de la méthode BFGS par rapport à toute les autres méthodes y compris DFP [14].

Exemple 5.3. L'algorithme BFGS appliqué sur le problème traité dans les exemples 5.1 et 5.2, donne les résultats suivant

k	x_k	$f(x_k)$	$\ g(x_k)\ $	t_k
0	(0.000, 1.000, 2.000, 3.000)	15.00	10.44	0.255
1	(-0.5117371, -1.046948, 0.7206573, 1.976526)	1.055	1.057	1.572
2	(-0.8725151, -0.4783924, 0.8245462, 0.4503025)	0.175	0.343	0.872
3	(-0.8517367, -0.3053396, 0.5705029, 0.3856921)	0.124	0.295	2.849
4	(0.000, 0.000, 0.000)	0.000	0.000	—

Tableau 5.3

Les matrices S_k engendrées par l'algorithme BFGS sont

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0.980 & -0.100 & -0.059 & -0.029 \\ -0.100 & 0.503 & -0.298 & -0.163 \\ -0.059 & -0.298 & 0.820 & -0.096 \\ -0.029 & -0.163 & -0.096 & 0.960 \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0.994 & -0.159 & -0.017 & 0.055 \\ -0.159 & 0.760 & -0.478 & -0.533 \\ -0.017 & -0.478 & 0.946 & 0.165 \\ 5.512 & -0.533 & 0.165 & 1.492 \end{pmatrix}$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} 0.412 & 0.072 & -0.267 & 0.171 \\ 0.072 & 0.667 & -0.378 & -0.580 \\ -0.267 & -0.378 & 0.839 & 0.215 \\ 0.171 & -0.580 & 0.215 & 1.469 \end{pmatrix} \quad S_4 = \begin{pmatrix} 3.000 & 1.000 & -2.000 & -1.000 \\ 1.000 & 1.000 & -1.000 & -1.000 \\ -2.000 & -1.000 & 2.000 & 1.000 \\ -1.000 & -1.000 & 1.000 & 2.000 \end{pmatrix}$$

5.3 Etude de la convergence

Powel [34] a montré la convergence de la méthode DFP avec une recherche linéaire exacte et une fonction objective f strictement convexe, le même auteur [35] a prouvé que la méthode BFGS est globalement convergente, si f est convexe et si la recherche linéaire est inexacte, dans le cas d'une fonction non-convexe, les tests numériques montre l'efficacité et la robustesse de cette méthode. Ce que les tests le confirme (la convergence de la méthode BFGS dans le cas non-convexe) reste théoriquement sans preuve.

En s'inspirant de [20] nous allons démontrer la convergence d'une méthode modifiée de BFGS dans le cas non convexe avec des recherches linéaires du type Armijo et Wolfe.

5.3.1 Motivations

Dans la proposition 5.3, on a vue que B_{k+1} hérite la définie-positivité de B_k pourvue que

$$\gamma_k^\top \delta_k > 0, \quad (5.28)$$

dans ce contexte et pour que la formule (5.21) assure la descente - ce qui est primordiale pour un algorithme de minimisation - il convient de l'écrire sous la forme

$$B_{k+1} = \begin{cases} B_k + \frac{\gamma_k \gamma_k^\top}{\gamma_k^\top \delta_k} - \frac{B_k \delta_k \delta_k^\top B_k}{\delta_k^\top B_k \delta_k} & \text{si } \gamma_k^\top \delta_k > \eta_k, \\ B_k & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5.29)$$

avec $\eta_k > 0$. Mieux encore, si η_k est remplacé par $\frac{\|\gamma_k\|^2}{M}$ ($M > 0$) en plus de la définie positivité qui est assurée, on a un résultat remarquable dû à Powel (Lemme 2, [35]).

Lemme 5.2. *Si l'algorithme BFGS avec une recherche linéaire inexacte est appliqué sur une fonction f différentiable est minorée et s'il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$\frac{\|\gamma_k\|^2}{\gamma_k^\top \delta_k} \leq M, \quad (5.30)$$

alors $\liminf_{k \rightarrow \infty} \|g(x_k)\| = 0$.

- Seulement si (5.30) est toujours vraie, pour une fonction deux fois différentiable à hessien uniformément borné [35], l'existence de M choisi à priori n'est pas garanti dans le cas non-convexe.
- Une approche est faite dans [21], γ_k est remplacé dans (5.21) par

$$\hat{\gamma}_k = c \|g(x_k)\| \delta_k + (g(x_{k+1}) - g(x_k)), \quad c > 0. \quad (5.31)$$

La convergence de cette modification est prouvé dans le cas non-convexe, seulement l'introduction de (5.31) modifie largement la méthode originale.

- Une autre approche est proposée dans [19], si la formule (5.29) est remplacée par

$$B_{k+1} = \begin{cases} B_k + \frac{\gamma_k \gamma_k^\top}{\gamma_k^\top \delta_k} - \frac{B_k \delta_k \delta_k^\top B_k}{\delta_k^\top B_k \delta_k} \text{ si } \frac{\gamma_k^\top \delta_k}{\|\delta_k\|^2} \geq c \|g(x_k)\|^\alpha, \\ B_k \text{ sinon.} \end{cases} \quad (5.32)$$

où c et α sont des constantes positives, l'algorithme suivant est donc proposé.

Algorithme 5.4.

Etape 0 (Initialisation) : x_0 et $\varepsilon > 0$ donnée, $S_0 = I$, $k = 0$

Etape 1 : Test d'arrêt : calculer $g(x_k)$, si $\|g(x_k)\| < \varepsilon$, alors stop sinon

Etape 2 : Calcul de la direction d_k :

$$d_k = -B_k^{-1}g(x_k),$$

Etape 3 : Recherche linéaire, trouver t_k solution du problème $\min_{t>0} f(x_k + td_k)$

Etape 4 : Si la recherche linéaire réussie, $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$

Calculer B_{k+1} d'après la formule (5.32)

Etape 4 : Remplacer k par $k + 1$ et aller en 1.

Remarque 5.5.

- On remarque facilement que si B_k est symétrique et définie positive alors B_{k+1} l'est aussi.
- De la première inégalité de Wolfe est de l'inégalité d'Armijo (voir Chapitre 2), et si f est minorée, alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} g(x_k)^\top d_k < \infty, \quad (5.33)$$

donc

$$\lim t_k g(x_k)^\top d_k = \lim g(x_k)^\top \delta_k = 0. \quad (5.34)$$

On va démontrer la convergence globale de l'algorithme 5.4 sous les hypothèses

Hypothèses 4.1

1. La tranche $\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x_0)\}$ est contenue dans un convexe borné D .
2. f est continûment différentiable dans D et il existe une constante $L > 0$ telle que

$$\|g(x) - g(y)\| \leq L \|x - y\| \quad \forall x, y \in D. \quad (5.35)$$

Notations

1. On définit les ensembles d'indices K et K_k par

$$K = \left\{ k \in N : \frac{\gamma_k^\top \delta_k}{\|\delta_k\|^2} \geq c \|g(x_k)\|^\alpha \right\}, \quad (5.36)$$

$$K_k = \{i \in K : i \leq k\}, \quad (5.37)$$

c et α des constantes positives. On note r_k le cardinal de K_k

2. Utilisons ces notations, (5.32) devient

$$B_{k+1} = \begin{cases} B_k + \frac{\gamma_k \gamma_k^\top}{\gamma_k^\top \delta_k} - \frac{B_k \delta_k \delta_k^\top B_k}{\delta_k^\top B_k \delta_k}, & \text{si } k \in K \\ B_k, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.38)$$

Remarque 5.6.

- Puisque $\{f(x_k)\}$ est décroissante, il est clair que la suite $\{x_k\}$ générée par l'algorithme 5.4 est dans $\mathcal{L}$.
- On note que si B_0 est définie positive et puisque (5.36) et (5.38) implique $\gamma_k^\top \delta_k > 0$ pour tout $k \in K$, alors B_k est définie positive et $d_k = -B_k^{-1}g(x_k)$ est une direction de descente.
- D'après [34] est le fait que pour des matrices A, B de $\mathcal{M}_n$, $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$. On a

$$\text{Tr}(B_{k+1}) = \text{Tr}(B_0) - \sum_{i \in K_k} \frac{\|B_i \delta_i\|}{\delta_i^\top B_i \delta_i} + \sum_{i \in K_k} \frac{\|\gamma_i\|}{\gamma_i^\top \delta_i}. \quad (5.39)$$

D'après (5.38), on a

$$\det(B_{k+1}) = \det(B_0) \prod_{i \in K_k} \frac{\gamma_i^\top \delta_i}{\delta_i^\top B_i \delta_i}. \quad (5.40)$$

- On rappelle qu'un pas t_k est sélectionné selon la règle d'Armijo si

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) \leq m t_k g(x_k)^\top d_k, \quad (5.41)$$

avec $m \in]0, 1[$ et il est sélectionné selon la règle de Wolfe si

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) \leq m_1 t_k g(x_k)^\top d_k, \quad (5.42)$$

$$g(x_{k+1})^\top d_k \geq m_2 g(x_k)^\top d_k, \quad (5.43)$$

avec $0 < m_1 < m_2 < 1$.

Théorème 5.2. Sous les hypothèses 5.3.1, et avec $\{x_k\}$ est une suite générée par l'algorithme 5.4, si K est fini, alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|g(x_k)\| = 0. \quad (5.44)$$

Démonstration.

Puisque K est fini, alors il existe $k_0 \in \mathbb{N}$, telle que $B_k = B_{k_0} \stackrel{def}{=} B$ pour tout $k > k_0$.

Du fait que B et B^{-1} sont définies positives et grâce au théorème 1.3 on a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, les inégalités suivantes

$$\alpha_1 \|x\|^2 \leq x^\top B x \leq \beta_1 \|x\|^2, \quad (5.45)$$

$$\alpha_2 \|x\|^2 \leq x^\top B^{-1} x \leq \beta_2 \|x\|^2, \quad (5.46)$$

de Cauchy-Schwarz et (5.45) on a

$$\gamma_k^\top \delta_k \leq \|\gamma_k\| \|\delta_k\| \leq L \|\delta\|^2.$$

Puisque $g(x_k)\delta_k < 0$, $\delta_k = t_k d_k$ et si t_k est selon Wolfe, on a d'après (5.43)

$$g(x_{k+1})^\top \delta_k \geq m_2 g(x_k)\delta_k > g(x_k)\delta_k.$$

Donc

$$\gamma_k^\top \delta_k = (g(x_{k+1}) - g(x_k))^\top \delta_k \geq -(1 - m_2)g(x_k)^\top \delta_k,$$

ce qui implique

$$L \|\delta\|^2 \geq \gamma_k^\top \delta_k \geq -(1 - m_2)g(x_k)^\top \delta_k = (1 - m_2)t_k^{-1} \delta_k^\top B_k \delta_k,$$

et de (5.45)

$$L \|\delta\|^2 \geq (1 - m_2)t_k^{-1} \delta_k^\top B_k \delta_k \geq (1 - m_2)t_k^{-1} \|\delta_k\|^2,$$

impliquant

$$t_k \geq (1 - m_2)L^{-1} > 0, \quad \forall k > k_0,$$

ce qui permet de conclure de (5.34) que

$$\lim t_k g(x_k)^\top d_k = 0 \Rightarrow \lim g(x_k)^\top d_k = -\lim g(x_k)^\top B^{-1}g(x_k) = 0. \quad (5.47)$$

De (5.46), on a

$$0 \leq \alpha_2 \|g(x_k)\|^2 \leq g(x_k)^\top B^{-1}g(x_k).$$

On passe à la limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|g(x_k)\| = 0.$$

Démontrons (5.44), si t_k est sélectionné selon Armijo.

Soit $t = \lim t_k$, si $t > 0$, on trouve directement l'équation (5.47) d'où (5.44) est vraie.

Par contre si $t = \lim t_k = 0$ et puisque $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$. La suite $\{x_k\}$ admet un point d'accumulation x , soit $\{x_k\}_{k \in \bar{K}}$ tel que $\lim_{k \in \bar{K}} x_k = x$.

Selon l'hypothèse (K fini) on a : $d_k = -B^{-1}g(x_k), \forall k > k_0$, donc

$$d_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} -B^{-1}g(x) = d.$$

D'après la méthode de sélection d'Armijo (Voir Remarque 3.3), pour k suffisamment grand, $t'_k = \frac{t_k}{\alpha}$ ($\alpha \in]0, 1[$), ne vérifie pas l'inégalité (5.41), donc

$$f(x_k + t'_k d_k) - f(x_k) - m t'_k g(x_k) d_k \geq 0, \quad (5.48)$$

divisons par t'_k et passons à la limite ($k \rightarrow \infty$), on obtient

$$g(x)d - m g(x)d = -(1 - m)g(x)^\top B^{-1}g(x) \geq 0.$$

Ce qui implique

$$g(x) = 0.$$

□

On va démontrer la convergence de l'algorithme 5.4 dans le cas où K est infini. On suppose qu'il existe $\mu > 0$ tel que

$$\|g(x_k)\| > \mu, \quad (5.49)$$

pour tout k est on déduit par contradiction.

Lemme 5.3. *Sous les hypothèses 5.3.1 et si l'inégalité (5.49) est vraie pour tout k , alors il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$\text{Tr}(B_{k+1}) \leq M r_k, \quad (5.50)$$

et

$$\sum_{i \in K_k} \frac{\|B_i \delta_i\|^2}{\delta_i^\top B_i \delta_i} \leq M r_k, \quad (5.51)$$

Démonstration.

De (5.36) et (5.49), on a $\forall i \in K_k, \gamma_i^\top \delta_i \geq c \|g(x_i)\|^\alpha \|\delta_i\| \geq c\mu^\alpha \|\delta_i\|$. (5.35) implique

$$\frac{\|\gamma_i\|^2}{\gamma_i^\top \delta_i} \leq \frac{L^2}{c\mu^\alpha} = M'.$$

De (5.30) et puisque $\sum_{i \in K_k} \frac{\|B_i \delta_i\|^2}{\delta_i^\top B_i \delta_i} > 0$ et $\sum_{i \in K_k} \frac{\|\gamma_i\|^2}{\gamma_i^\top \delta_i} \leq M' r_k$, on a

$$\text{Tr}(B_{k+1}) \leq \text{Tr}(B_0) + M' r_k \leq M r_k,$$

($M = (\frac{\text{Tr}(B_0)}{r_k} + M')$), d'où (5.50). Puisque $\text{Tr}(B_{k+1}) > 0$, alors

$$\sum_{i \in K_k} \frac{\|B_i \delta_i\|^2}{\delta_i^\top B_i \delta_i} \leq M r_k - \text{Tr}(B_{k+1}) \leq M r_k.$$

□

Lemme 5.4. *Sous les hypothèses 5.3.1, si (5.49) est vraie, alors il existe des constantes $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ positives telles que $\forall k \in \mathbb{N}$, on a*

$$\|B_i \delta_i\| \leq \beta_1 \|\delta_i\|, \quad (5.52)$$

$$\beta_2 \|\delta_i\|^2 \leq \delta_i^\top B_i \delta_i \leq \beta_3 \|\delta_i\|^2, \quad (5.53)$$

pour tout $i \in K_k$.

Démonstration.

Il faut noter que (5.51) est une implication de (5.49). De (5.51) on a, pour tout $i \in K_k$, $\frac{\|B_i \delta_i\|^2}{\delta_i^\top B_i \delta_i} \leq 2M = \beta_1$ (sinon $\sum \frac{\|B_i \delta_i\|^2}{\delta_i^\top B_i \delta_i} > 2M r_k > M r_k$), et de Cauchy-Schwarz

$$\|B_i \delta_i\|^2 \leq \beta_1 \delta_i^\top B_i \delta_i \leq \beta_1 \|\delta_i\| \|B_i \delta_i\|,$$

d'où (5.52) et

$$\delta_i^\top B_i \delta_i \leq \|\delta_i\| \|B_i \delta_i\| \leq \beta_1 \|\delta_i\|^2,$$

d'où la deuxième inégalité (5.53) avec $\beta_3 = \beta_1$.

Du fait que, pour tout k , B_k est définie positive, et d'une application directe du théorème 1.3, découle la dernière inégalité.

De (5.51) et (5.52), on a

$$\|B_i \delta_i\| = t_i \|g(x_i)\| \leq \beta_1 t_i \|d_i\|, \quad \forall i \in K, \quad (5.54)$$

et

$$t_i^2 \|d_i\|^2 = \|\delta_i\|^2 \leq \beta_2^{-1} t_i^2 d_i^\top B_i d_i = t_i^2 \beta_2^{-1} (-g(x_i)^\top d_i) \leq \beta_2^{-1} t_i^2 \|d_i\| \|g(x_i)\|, \quad (5.55)$$

donc

$$\|d_i\| \leq \beta_2^{-1} \|g(x_i)\|, \quad \forall i \in K, \quad (5.56)$$

et de (5.57)

$$\|g(x_i)\|^2 \leq \beta_1^2 \|d_i\|^2 \leq -\beta_1^2 \beta_2^{-1} g(x_i)^\top d_i, \quad \forall i \in K. \quad (5.57)$$

□

Théorème 5.3. *Sous les hypothèses 5.3.1 et si la suite $\{x_k\}$ générée par l'algorithme 5.4 avec une recherche linéaire d'Armijo, alors*

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|g(x_k)\| = 0. \quad (5.58)$$

Démonstration.

D'après le théorème 5.2 il suffit de vérifier (5.58) dans le cas, K infini. Supposons que (5.49) est vraie. On note $t = \limsup_{k \in K} t_k = \lim_{k \in \tilde{K}} t_k$, avec $\tilde{K} \subset K$.

De l'hypothèse 5.3.1 : $\mathcal{L}$ est borné $\Rightarrow \{x_k\}_{k \in \tilde{K}}$ est bornée $\xRightarrow{\text{continuité de } g}$ $\{g(x_k)\}_{k \in \tilde{K}}$ est bornée $\Rightarrow \{d_k\}_{k \in \tilde{K}}$ est bornée.

Sans perdre de généralité, on peut supposer que

$$x_k \xrightarrow[k \in \tilde{K}]{} x \text{ et } d_k \xrightarrow[k \in \tilde{K}]{} d,$$

selon (5.34) on a

$$\lim_{k \in \tilde{K}} g(x_k)^\top d_k = t \cdot g(x)^\top d = 0.$$

Et d'après (5.57), il suffit de prouver que $t_k > 0$ pour avoir $\liminf \|g(x_k)\| = 0$.

Supposons que $\lim t_k = t = 0$, alors pour k suffisamment grand, $t'_k = \frac{t_k}{\alpha_k} (\alpha_k \in]0, 1[)$ ne vérifie pas l'inégalité (5.41), donc pour $m \in]0, 1[$ et la remarque précédente

$$f(x_k + t'_k d_k) - f(x_k) \geq m t'_k g(x_k)^\top d_k \geq t'_k g(x_k)^\top d_k. \quad (5.59)$$

Le théorème de la moyenne pour $\alpha \in]0, 1[$, on a

$$f(x_k + t'_k d_k) - f(x_k) = t'_k g(x_k + \alpha t'_k d_k)^\top d_k, \quad (5.60)$$

donc $g(x_k + \alpha t'_k d_k)^\top d_k \geq g(x_k)^\top d_k$, alors

$$g(x_k + \alpha t'_k d_k)^\top d_k - g(x_k)^\top d_k \geq 0.$$

Cauchy-Schwarz et (5.35), donne

$$(g(x_k + \alpha t'_k d_k) - g(x_k))^\top d_k \leq \|g(x_k + \alpha t'_k d_k) - g(x_k)\| \|d_k\| \leq t'_k \alpha L \|d_k\|^2 \leq t'_k L \|d_k\|^2.$$

De (5.59) et (5.60) on a

$$g(x_k + \alpha t'_k d_k)^\top d_k \geq m g(x_k)^\top d_k \Rightarrow (g(x_k + \alpha t'_k d_k) - g(x_k))^\top d_k \geq -(1 - m) g(x_k)^\top d_k,$$

donc

$$L t'_k \|d_k\|^2 \geq -(1 - m) g(x_k)^\top d_k,$$

de (5.55) ($\|d_k\|^2 \leq -\beta_2^{-1}g(x_k)^\top d_k$), donne

$$t'_k \geq (1 - m)\beta_2 > 0, \text{ pour tout } k.$$

Ce qui est une contradiction avec l'hypothèse.

□

Avant de démontrer la convergence de l'algorithme 5.4 dans le cas d'une recherche linéaire de Wolfe, abordons un lemme similaire au lemme 2.2 dans [34].

Lemme 5.5. *Sous les hypothèses 5.3.1 avec $\{x_k\}$ générée par l'algorithme 5.4 avec une recherche linéaire d'Armijo et si (5.49) est vraie pour tout k , alors il existe une constante $m_3 > 0$ telle que pour tout k suffisamment grand, on a*

$$\prod_{i \in K_k} t_i \geq m_3^{r_k}. \quad (5.61)$$

Démonstration.

D'après (5.40), on a

$$\det(B_{k+1}) = \det(B_0) \prod_{i \in K_k} \frac{\gamma_i^\top \delta_i}{\delta_i^\top B_i \delta_i}, \quad (5.62)$$

(5.43) implique

$$g(x_{i+1})^\top \delta_i \geq m_2 g(x_i)^\top \delta_i \geq g(x_i)^\top \delta_i,$$

donc

$$\gamma_i^\top \delta_i = g(x_{i+1})^\top \delta_i - g(x_i)^\top \delta_i \geq -(1 - m_2)g(x_i)^\top \delta_i,$$

puisque $g(x_i) = -t_i^{-1}B_i \delta_i$,

$$\gamma_i^\top \delta_i \geq (1 - m_2)t_i^{-1}\delta_i^\top B_i \delta_i. \quad (5.63)$$

(5.62) et (5.63) implique

$$\det(B_{k+1}) \geq \det(B_0) \prod_{i \in K_k} (1 - m_2)t_i^{-1}.$$

D'autre part si

$$\det(B_{k+1}) = \prod_{\alpha_i \in \sigma(B_{k+1})} \alpha_i$$

et

$$\text{Tr}(B_{k+1}) = \sum_{\alpha_i \in \sigma(B_{k+1})} \alpha_i$$

et puisque la moyenne arithmétique est supérieure à la moyenne géométrique

$$\text{Tr}(B_{k+1}) \geq n(\det(B_{k+1}))^{1/n} \quad (5.64)$$

et de (5.50), on a

$$Mr_k \geq \text{Tr}(B_{k+1}) \geq n \left[\det(B_0) \prod_{i \in K_k} (1 - m_2) t_i^{-1} \right]^{1/n},$$

donc

$$\prod_{i \in K_k} t_i^{-1} \leq (1 - m_2)^{-r_k} \frac{1}{\det(B_0)} \left(\frac{Mr_k}{n} \right)^n,$$

donc

$$\prod_{i \in K_k} t_i \geq (1 - m_2)^{r_k} \det(B_0) \left(\frac{Mr_k}{n} \right)^{-n}.$$

En posant $m_3 = (1 - m_2) \left[\det(B_0) \left(\frac{Mr_k}{n} \right)^n \right]^{1/r_k}$, on déduit (5.61).

□

Théorème 5.4. *Sous les hypothèses 5.3.1, si $\{x_k\}$ est générée par l'algorithme 5.4 avec une recherche linéaire de Wolfe, alors*

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|g(x_k)\| = 0.$$

Démonstration.

D'après le théorème 5.2, il suffit de vérifier (5.58) dans le cas K infini. Soit $K = \{k_0 < k_1 < k_2 \dots\}$,

de (5.34), et puisque $B_{k_i} \delta_{k_i} = -t_{k_i} g(x_{k_i})$, on a

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|g(x_{k_i})\|^2 t_{k_i} \frac{\delta_{k_i}^\top B_{k_i} \delta_{k_i}}{\|B_{k_i} \delta_{k_i}\|} = - \sum_{i=0}^{\infty} g(x_{k_i}) \delta_{k_i} < \infty. \quad (5.65)$$

Supposons que (5.58) n'est pas juste, alors il existe $\mu > 0$ tel que $\|g(x_{k_i})\| > \mu$, pour tout i , et de (5.65) on a

$$\sum_{i=0}^{\infty} t_{k_i} \frac{\delta_{k_i}^\top B_{k_i} \delta_{k_i}}{\|B_{k_i} \delta_{k_i}\|} < \infty.$$

Donc, $\forall \zeta > 0, \exists i_0 > 0$ tel que $\forall q > i_0$, on a

$$\sum_{i=i_0+1}^{i_0+q} t_{k_i} \frac{\delta_{k_i}^\top B_{k_i} \delta_{k_i}}{\|B_{k_i} \delta_{k_i}\|} \leq \zeta$$

L'inégalité géométrique, implique

$$\left(\prod_{i=i_0+1}^{i_0+q} t_{k_i} \frac{\delta_{k_i}^\top B_{k_i} \delta_{k_i}}{\|B_{k_i} \delta_{k_i}\|} \right)^{1/q} \leq \frac{1}{q} \sum_{i=i_0+1}^{i_0+q} t_{k_i} \frac{\delta_{k_i}^\top B_{k_i} \delta_{k_i}}{\|B_{k_i} \delta_{k_i}\|} \leq \frac{\zeta}{q}.$$

donc

$$\prod_{i=i_0+1}^{i_0+q} t_{k_i} \leq \frac{\zeta}{q} \left(\prod_{i=i_0+1}^{i_0+q} \frac{\|B_{k_i} \delta_{k_i}\|}{\delta_{k_i}^\top B_{k_i} \delta_{k_i}} \right)^{1/q}.$$

Pour la deuxième fois l'inégalité géométrique, implique

$$\left(\prod_{i=i_0+1}^{i_0+q} t_{k_i} \right)^{1/q} \leq \frac{\zeta}{q} \left(\frac{1}{q} \sum_{i=i_0+1}^{i_0+q} \frac{\|B_{k_i} \delta_{k_i}\|}{\delta_{k_i}^\top B_{k_i} \delta_{k_i}} \right) \leq \frac{\zeta}{q^2} \sum_{i=0}^{i_0+q} \frac{\|B_{k_i} \delta_{k_i}\|}{\delta_{k_i}^\top B_{k_i} \delta_{k_i}},$$

de (5.51), on a

$$\left(\prod_{i=i_0+1}^{i_0+q} t_{k_i} \right)^{1/q} \leq \frac{\zeta}{q^2} M(j_0 + q + 1).$$

On passe à la limite pour $q \rightarrow \infty$, qui donne une contradiction avec (5.61).

□

Dans les théorèmes 5.2 et 5.3 on a montré que la suite $\{x_k\}$ admet un point adhérent qui

est un point stationnaire du problème d'optimisation. En ajoutant quelques conditions, on peut montrer la convergence de la suite vers un minimum local.

Théorème 5.5. *Soit f une fonction de classe C^2 . Supposons que $\delta_k \rightarrow 0$. Si la suite $\{x_k\}$ admet un point d'accumulation x^* tel que $g(x^*) = 0$ et $H(x^*)$ est définie positive, alors la suite $\{x_k\}$ converge vers x^* . Si de plus H est Hölderien et la recherche linéaire est de Wolfe ou d'Armijo avec les paramètres $m, m_2 \in]0, 1/2[$, alors la convergence est super-linéaire.*

Démonstration.

D'après les hypothèses et (CS2), x^* est un minimum local stricte (unique dans un voisinage de x^*) et puisque $\delta_k \rightarrow 0$ alors $x_k \rightarrow x^*$ (une suite de Cauchy avec un point d'accumulation donc elle converge). Puisque $H(x^*)$ est définie positive alors la matrice

$$\bar{H}_k = \int_0^1 H(x_k + \tau\delta_k) d\tau,$$

est définie positive pour k assez grand. La formule de la moyenne appliquée sur g donne

$$\gamma_k = \bar{H}_k \delta_k,$$

donc

$$\gamma_k^\top \delta_k = \delta_k^\top \bar{H}_k \delta_k,$$

alors il existe une constante $a > 0$ telle que

$$\gamma_k^\top \delta_k \geq a \|\delta_k\|^2,$$

ce qui implique pour k assez grand ($g(x_k) \rightarrow 0$), l'inégalité

$$\frac{\gamma_k^\top \delta_k}{\|\delta_k\|^2} \geq c \|g(x_k)\|^\alpha,$$

est toujours vérifiée. Ce qui signifie que pour k assez grand l'algorithme 5.4 est identique à

l'algorithme BFGS ordinaire, d'après les Hypothèses la convergence est super-linéaire [34]. Ce théorème établit la convergence locale de l'algorithme 5.44, seulement il est difficile de vérifier la condition

$$\delta_k \rightarrow 0. \quad (5.66)$$

Si on utilise les recherches linéaires d'Armijo (5.41) ou de Wolfe (5.42,5.43). En modifiant l'inégalité (5.41), on peut forcer la réalisation de la limite (5.66). En effet, soit $m_3 \in]0, 1[$ et $m_4 > 0$ et au lieu de (5.41) on a

$$f(x_k + t_k d_k) \leq f(x_k) + m_3 t_k g(x_k)^\top d_k - m_4 \|t_k d_k\|, \quad (5.67)$$

puisque $-m_4 \|t_k d_k\| < 0$, alors (5.67) implique (5.41) et il est évident que tous les résultats précédents restent valable pour cette modification. Si $t_k \rightarrow 0$ on a

$$-m_4 \|t_k d_k\| = -m_4 \|\delta_k\| = o(t_k),$$

maintenant si $t_k > 0$ pour tout k et puisque de (5.67)

$$m_4 \|\delta_k\| \leq f(x_k) - f(x_k + t_k d_k) \quad (5.68)$$

et du fait que (5.67) assure la décroissance de la fonction f , alors si $k \rightarrow \infty$, le terme à droite de (5.68) tend vers zéro, on déduit (5.66).

□

5.4 Tests numériques

Nous effectuons maintenant quelques tests numériques sur les algorithmes SR1, DFP et BFGS, avec des fonctions tests issus dans leurs totalités des problèmes proposés par J.J.Moré, B.S. Garbow et K.E. Hillstrome dans [24].

Problème 1 : Fonction de Dixon généralisée :

$$f(x) = (x_1 - 1)^2 + \sum_{i=2}^n i(2x_i^2 - x_{i-1})^2,$$

avec $x_0 = (1, \dots, 1)^\top$ et $f(x^*) = 0$.

Problème 2 : Fonction de Oren généralisée

$$f(x) = \left[\sum_{i=1}^n ix_i^2 \right]^2,$$

avec $x_0 = (1, \dots, 1)^\top$, $x^* = (0, \dots, 0)$ et $f(x^*) = 0$.

Problème 3 : Fonction singulière de Powel généralisée

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n/4} \left\{ (x_{4i-3} + 10x_{4i-2})^2 + 5(x_{4i-1} - x_{4i})^2 + (x_{4i-2} - 2x_{4i-1})^4 + 10(x_{4i-3} - x_{4i})^4 \right\},$$

avec $x_0 = (0, \dots, 0)^\top$, $x^* = (0, \dots, 0)^\top$ et $f(x^*) = 0$.

Problème 4 : Fonction de Rosenbrock généralisée

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ 100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (1 - x_i)^2 \right\},$$

avec $x_0 = (-1, 1, \dots, (-1)^n)^\top$, $x^* = (1, 1)$ et $f(x^*) = 0$.

Problème 5 : Fonction de Wood généralisée

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n/4} \left\{ 100(x_{4i-2} + x_{4i-3}^2)^2 + (1 - x_{4i-3})^2 + 90(x_{4i} - x_{4i-1}^2)^2 \right. \\ \left. + (1 - x_{4i-1})^2 + 10(x_{4i-2} + x_{4i} - 2)^2 + 0.1(x_{4i-2} - x_{4i})^2 \right\},$$

avec $x_0 = (0, \dots, 0)^\top$, $x^* = (1, \dots, 1)^\top$ et $f(x^*) = 0$.

Dans tout les tests le critère d'arrêt de l'algorithme est $\varepsilon = 10^{-5}$, l'algorithme est appliqué avec les recherches linéaires d'Armijo, Goldstein et Wolfe, avec les paramètres $m_1 = 0.3$, $m_2 = 0.7$ pour Goldstein et Wolfe, $m = 0.3$ pour Armijo, Les résultats présentant le nombre d'itérations nécessaires pour la convergence sont illustrés dans le tableau 5.4-5.5.

Exercices

Exercice 5.1. En utilisant la définition de la trace d'une matrice, montrer que

$$\text{Tr}(B_{k+1}) = \text{Tr}(B_k) + \frac{\|\gamma_k\|^2}{\gamma_k^\top \delta_k} - \frac{\|B_k \delta_k\|^2}{\delta_k^\top B_k \delta_k}$$

où

$$B_{k+1} = B_k + \frac{\gamma_k \gamma_k^\top}{\gamma_k^\top \delta_k} - \frac{B_k \delta_k \delta_k^\top B_k}{\delta_k^\top B_k \delta_k}.$$

Exercice 5.2. Montrer que si B_k (générée par la méthode DFP) est définie positive et $\gamma_k^\top \delta_k > 0$, alors B_{k+1} est aussi définie positive.

Utiliser le fait que

$$B_{k+1} = \left(I - \frac{\gamma_k \delta_k^\top}{\gamma_k^\top \delta_k}\right) B_k \left(I - \frac{\delta_k \gamma_k^\top}{\gamma_k^\top \delta_k}\right) + \frac{\gamma_k \gamma_k^\top}{\gamma_k^\top \delta_k}.$$

Exercice 5.3. Utiliser la méthode DFP pour minimiser

$$f(x) = \frac{1}{2} x^\top A x - x^\top b; \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Où

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et utilisant } x_0 = (0, 0)^\top \text{ et } S_0 = I.$$

Exercice 5.4. Soit la fonction quadratique définie par

$$f(x) = \frac{1}{2} x^\top Q x + \log(\pi)$$

Où $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Utiliser la méthode de correction de rang un (SR1) pour minimiser la fonction f avec $x_1 = (1, 2)$ et $S_1 = I$.

Problème	n	R.L	Sans reinitialisation			Avec reinitialisation		
			SR1	DFP	BFGS	SR1	DFP	BFGS
PI : Dixon	2	Armijo	8	10	8	8	9	9
		Goldestein	8	10	8	8	9	9
		Wolfe	8	10	8	8	9	9
	4	Armijo	11	11	11	12	13	13
		Goldestein	12	11	12	12	14	13
		Wolfe	12	11	12	12	14	13
	50	Armijo	-	58	58	-	99	71
		Goldestein	58	58	59	77	72	67
		Wolfe	58	58	59	77	77	68
	100	Armijo	-	101	111	166	351	138
		Goldestein	107	102	111	136	236	120
		Wolfe	-	102	111	124	131	121
PII : Oren	2	Armijo	21	29	23	15	15	15
		Goldestein	12	23	11	8	8	8
		Wolfe	21	32	22	9	8	9
	4	Armijo	28	312	41	20	22	21
		Goldestein	20	225	23	14	21	16
		Wolfe	33	39	44	21	21	21
	50	Armijo	104	-	197	104	536	206
		Goldestein	84	-	115	80	259	104
		Wolfe	98	-	139	93	410	143
	100	Armijo	197	-	427	202	1214	406
		Goldestein	176	-	353	203	1820	305
		Wolfe	172	-	473	204	1618	406
PIII : Powel	4	Armijo	21	73	25	23	102	29
		Goldestein	20	91	25	17	295	34
		Wolfe	21	66	32	25	40	35
	12	Armijo	87	-	92	-	286	76
		Goldestein	63	-	76	62	924	82
		Wolfe	76	969	74	46	652	53
	56	Armijo	679	-	231	315	-	231
		Goldestein	184	-	206	171	-	206
		Wolfe	189	-	211	173	-	211
	100	Armijo	-	-	306	-	-	299
		Goldestein	260	-	199	220	-	185
		Wolfe	264	-	192	200	-	198

Tableau 5.4 – Résultats des tests numériques sur les méthodes Quasi-Newton

Problème	n	R.L	Sans reinitialisation			Avec reinitialisation		
			SR1	DFP	BFGS	SR1	DFP	BFGS
PIV : Rosenbrock	2	Armijo	56	37	34	-	77	38
		Goldstein	36	208	35	53	73	44
		Wolfe	36	626	31	34	79	40
	4	Armijo	82	-	50	-	437	58
		Goldstein	49	776	41	47	407	47
		Wolfe	49	-	39	48	407	52
	50	Armijo	-	-	249	-	-	258
		Goldstein	174	-	196	257	-	191
		Wolfe	-	-	239	222	-	235
	100	Armijo	-	-	391	566	-	389
		Goldstein	277	-	305	419	1872	305
		Wolfe	-	-	363	310	2729	367
PV : Wood	4	Armijo	-	83	27	-	83	29
		Goldstein	30	104	22	32	113	26
		Wolfe	-	218	21	30	112	27
	12	Armijo	-	-	43	-	391	44
		Goldstein	82	135	35	80	117	35
		Wolfe	86	411	34	80	118	36
	56	Armijo	-	-	94	-	-	96
		Goldstein	264	230	76	243	228	76
		Wolfe	112	401	70	338	338	71
	100	Armijo	-	-	129	-	-	130
		Goldstein	388	262	101	374	256	101
		Wolfe	274	412	96	304	345	96

Tableau 5.5 – Résultats des tests numériques sur les méthodes Quasi-Newton

Bibliographie

- [1] L. Armijo. Minimization of functions having Lipschitz continuous first derivatives. Pacific Journal of Mathematics 16 (1966) 1-3
- [2] M. S. Bazara. H.D. Sherali, C.M Shetty. Nonlinear programming. J.W&S (1993)
- [3] J. F. Bonnans, J. C. Gilbert, C. Lemaréchal and C. A. Sagastizábal. Numerical optimization : theoretical and practical aspects. Springer Science & Business Media (2006).
- [4] C. G. Broyden. Quasi-Newton method and their application to function minimization, Mathematics of Computation, 21,(1967).
- [5] A. Bukley, A.Lenir. QN-like variable storage conjugate gradients. Math. Prog. 27,(1983)155-175.
- [6] R. Byrd and J. Nocedal. A tool for the analysis of quasi-Newton methods with application to unconstrained minimization, SIAM Journal on Numerical Analysis, 26 (1989) 727-739.
- [7] A. Cauchy. Méthodes générales pour la résolution des systèmes d'équations simultanées. Comptes rendus Acad. Sc. Paris, Tome 25 (1847) 536-538.
- [8] F. Chatelin. Eigenvalues of Matrices, J.Wiley & S (1993).
- [9] W. C. Davidon. Variable metric methods for minimization, AEC Research Development, Report ANL-5990 (1959).

- [10] J. E. Denis, Jr., J.J. Moré. A characterisation of superlinear convergence and its application to quasi-Newton methods, *Mathematics of computation*, 28 (1974) 549-560.
- [11] J. E. Dennis, H. Wolkowicz. Sizing and Least Change Secant Methods, CORR Report 93-11 (1993).
- [12] R. Fletcher. A new approach to variable metric algorithms, *Computer Journal*, 13,(1970)317-322.
- [13] R. Fletcher, M.J.D. Powell. A Rapidly convergent descent method for minimisation, *Computer Journal* 6,(1963)163-168.
- [14] R. Fletcher. An overview of Unconstrained Optimization in Algorithms for Continuous Optimization, *The State of the Art*, E. Spedicato, ed., Kluwer academic Publishers, Boston, (1994)109-143.
- [15] A. A. Goldstein, J.F. Price. An effective algorithm for minimization. *Num. Math.* 10,(1967)184-189.
- [16] D. Goldfarb. A family of metric variable methods derived by variation means, *mathematics Of computation* 24,(1970)23-26.
- [17] A. Griewank, Ph.L. Toint. Local convergence analysis of partitioned quasi-Newton updates, *Numeric Mathematics* 39,(1982)429-448.
- [18] T.G. Kolda. Limited-Memory matrix methods with application, *Applied Mathematics program*, university of Maryland (1998).
- [19] A. S.Lewis. Convex analysis on the hermitian matrices, Technical report CORR 97-09, University of Waterloo (1994).
- [20] D. H. Li, M. Fukushima. A global convergence of BFGS methods for nonconvex unconstrained optimization problems, *SIAM Journal on Numerical Analysis*.7, (1999).
- [21] D. H. Li, M. Fukushima. A modified BFGS method and its global convergence in nonconvex minimization, Technical Report 98003, Département of Applied Mathematics and Physics, Kyoto University, (1998).

- [22] D. G. Luenberger. Linear and Nonlinear Programming, 2nd edition, Addison-Wesley (1984).
- [23] P. E. Gill, W. Murray. Conjugate gradient method for large-scale nonlinear optimization, Technical report SOL 79-15, Dept. of Operation Res. Stanford University, (1979).
- [24] J. J. Moré, B.S. Garbow, K.E. Hillstrome. Testing unconstrained optimization software, ACM Trans. Math. Software, 7, (1981)17-41.
- [25] L. . Conjugate gradient methods less dependent on conjugacy. SIAM Review 28,(1986)501-511.
- [26] Y. E. Nesterov. On the a approach to the construction of optimal methods of minimization of smooth convex function, *Economica I Matem.* 24, (1988)504-517.
- [27] J. Nocedal. Adapting quasi-Newton matrices with limited storage, *Mathematics of computation* 35, (1980)773-782.
- [28] J. Nocedal. Theory of algorithms for unconstrained optimization, *acta Numerica*, (1999)199-242.
- [29] J. Nocedal, J. W. Stephen. Numerical optimization. Springer (1999).
- [30] D. P. O'Leary. A discrete Newton algorithm for minimizing a function of many variable, *Math. Prog.* 23, (1982)20-30.
- [31] S. S. Oren, E. Spedicato, Optimal condition of self-scaling variable metric algorithms, *Math. Prg.*, 10, (1976)70-90.
- [32] J. M. Perry. A class of conjugate gradient with two-step variable-metric memory, Discussion paper 269, C.M.S.E.M.S. Northwestern University (Evanston, IL, 1977)
- [33] J. D. Pearson. Variable metric methods of minimization. *Computer Journal*, Vol 12, (1971)21-36.
- [34] M. J. D. Powell. On the convergence of the variable metric algorithm, *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications*, (1971)21-36.

- [35] M. J. D. Powell. Some properties of the variable metric algorithm for minimization without exact line searches, in *Nonlinear Programming, SIAM-AMS Proceeding, Vol. IX*, R.W. Cottle, and C.E. Lemke, eds., SIAM, (1976)35-72.
- [36] L. Schwartz. *Analyse, topologie générale et analyse fonctionnelle*, Hermann (1970).
- [37] M. Sibony, J.C. Mardon. *Analyse Numérique. Systèmes linéaires et non linéaires*, HERMAN (1982).
- [38] D. F. Schanno. Conditionning of quasi-Newton methods for function minimization, *Mathematics of computation*, 24,(1970)641-656.
- [39] D. F. Schanno. On the convergence of new conjugate gradient algorithm, *SIAM Journal on numerical analysis*, 15,(1978a)1247-1257.
- [40] T. Steihaug. The conjugate gradient method and trust regions in large-scale optimization, *SIAM J. Num. Anal.* 20, (1983)626-637.
- [41] P. Wolfe. Convergence for ascent methods. *SIAM Rev.* 11,226-235, 1968.
- [42] W. I. Zangwill. *Nonlinear programming : a unified approach*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, RI, 1969.
- [43] G. Zoutendijk. Non linear programming, computation programming. In J. Abadie (ed), *integer and non linear programming*. North Holland (1970)37-86.