
Série N°4 (Optimisation non linéaire)

Master 1 COTA-MA (2020–2021)

Exercice 1

1) Considérons la mise à jour de rang un

$$H_1 = I + uv^T$$

où $u, v \in \mathbb{R}^n$ et $u \neq 0$. Trouver les valeurs propres de H_1 , puis montrer que

$$\det(H_1) = 1 + u^T v.$$

2) Soit $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ et considérons la mise à jour de rang deux

$$H_2 = I + u_1 u_2^T + v_1 v_2^T.$$

Montrer que

$$H_2 = (I + u_1 u_2^T) \left[I + (I + u_1 u_2^T)^{-1} v_1 v_2^T \right],$$

puis, en utilisant la question précédente et le théorème de Sherman-Morrison-Woodburg, montrer que

$$\det(H_2) = (1 + u_1^T u_2) (1 + v_1^T v_2) - (u_1^T v_2) (u_2^T v_1).$$

Solution: .

1) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ de H_1 , on a

$$(I + uv^T) x = \lambda x \iff uv^T x = (\lambda - 1)x,$$

donc x est soit parallèle à $u \neq 0$ ou orthogonal à v . Si x est orthogonal à v , alors la valeur propre correspondante est égale à 1 ; sinon la valeur propre correspondante est égale à $1 + u^T v$. Puisque le déterminant et le produit des valeurs propre d'une matrice, alors

$$\det(H_1) = 1 + u^T v.$$

2) Soit $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ et considérons la mise à jour de rang deux

$$H_2 = I + u_1 u_2^T + v_1 v_2^T.$$

Il est facile de remarquer que

$$(I + u_1 u_2^T) \left[I + (I + u_1 u_2^T)^{-1} v_1 v_2^T \right] = I + u_1 u_2^T + v_1 v_2^T.$$

Série N°3

En utilisant la question précédente et le théorème de Sherman-Morrison-Woodburg, on a

$$\begin{aligned} \det(I + u_1 u_2^T + v_1 v_2^T) &= (1 + u_1^T u_2) \left[1 + v_2^T (I + u_1^T v_2)^{-1} v_1^T \right], \\ &= (1 + u_1^T u_2) \left[1 + v_2^T \left(I - \frac{u_1 u_1^T}{1 + u_1^T u_2} \right) v_1^T \right], \\ &= (1 + u_1^T u_2) (1 + v_1^T v_2) - (u_1^T v_2) (u_2^T v_1). \end{aligned}$$

■

Théorème (de Sherman-Morrison-Woodburg) : Soit A une matrice $n \times n$ non singulière et $u, v \in \mathbb{R}^n$. Si $1 + v^T A^{-1} u \neq 0$, alors la mise à jour de rang un $A + uv^T$ est inversible et

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u}.$$

Exercice 2 Soit A une matrice $n \times n$ non singulière et $u, v \in \mathbb{R}^n$. Si $1 + v^T A^{-1} u \neq 0$, alors la mise à jour de rang un $A + uv^T$ est inversible et

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u}.$$

Exercice 3 On veut minimiser la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - x^T b; \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en utilisant la méthode SR1.

1) Montrer que si $\delta_k = (\delta_k^1, \delta_k^2)^T$ et $\gamma_k = (\gamma_k^1, \gamma_k^2)^T$, alors

$$S_{k+1} = S_k + \begin{bmatrix} \frac{(\delta_k^1 - \gamma_k^1)^2}{(\delta_k^1 - \gamma_k^1)\gamma_k^1 + (\delta_k^2 - \gamma_k^2)\gamma_k^2} & \frac{(\delta_k^1 - \gamma_k^1)(\delta_k^2 - \gamma_k^2)}{(\delta_k^1 - \gamma_k^1)\gamma_k^1 + (\delta_k^2 - \gamma_k^2)\gamma_k^2} \\ \frac{(\delta_k^1 - \gamma_k^1)(\delta_k^2 - \gamma_k^2)}{(\delta_k^1 - \gamma_k^1)\gamma_k^1 + (\delta_k^2 - \gamma_k^2)\gamma_k^2} & \frac{(\delta_k^2 - \gamma_k^2)^2}{(\delta_k^1 - \gamma_k^1)\gamma_k^1 + (\delta_k^2 - \gamma_k^2)\gamma_k^2} \end{bmatrix}.$$

2) Montrer que $t_k = \arg \min\{f(x_k + t d_k), t > 0\} = -\frac{g(x_k)^T d_k}{d_k^T A d_k}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

3) Calculer les trois premières itérations de l'algorithme SR1 pour minimiser f sur \mathbb{R}^2 avec $x_0 = (2, 2)^T$ et $S_0 = I$. Que peut on déduire.

Solution:

1)

$$S_{k+1} = S_k + \begin{bmatrix} \frac{(\delta_k^1 - \gamma_k^1)^2}{(\delta_k^1 - \gamma_k^1)\gamma_k^1 + (\delta_k^2 - \gamma_k^2)\gamma_k^2} & \frac{(\delta_k^1 - \gamma_k^1)(\delta_k^2 - \gamma_k^2)}{(\delta_k^1 - \gamma_k^1)\gamma_k^1 + (\delta_k^2 - \gamma_k^2)\gamma_k^2} \\ \frac{(\delta_k^1 - \gamma_k^1)(\delta_k^2 - \gamma_k^2)}{(\delta_k^1 - \gamma_k^1)\gamma_k^1 + (\delta_k^2 - \gamma_k^2)\gamma_k^2} & \frac{(\delta_k^2 - \gamma_k^2)^2}{(\delta_k^1 - \gamma_k^1)\gamma_k^1 + (\delta_k^2 - \gamma_k^2)\gamma_k^2} \end{bmatrix}.$$

Série N°2

2) Si f est une fonction quadratique convexe,

$$\theta(t) = f(x_k + td_k)$$

alors

$$\theta'(t_k) = g(x_k + td_k)^T d_k = ((x_k + td_k)^T A + b^T) d_k = (x_k^T A + b^T) d_k + td_k^T A d_k = g(x_k + td_k)^T d_k$$

$$t_k \text{ est un minimum local pour } \theta \text{ sur }]0, \infty[\Rightarrow \theta'(t_k) = g(x_k + td_k)^T d_k = 0 \Rightarrow t_k = -\frac{g(x_k)^T d_k}{d_k^T A d_k}.$$

3) On a

$$g(x) = Ax - b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Puisque $x_0 = (2, 2)$ et $S_1 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors

$$g(x_0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$d_0 = -S_0 g(x_0) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La fonction objective est quadratique ce qui donne

$$t_0 = \arg \min\{f(x_0 + td_0), t > 0\} = -\frac{g(x_0)^T d_0}{d_0^T A d_0} = \frac{2}{3}$$

donc

$$x_1 = x_0 + t_0 d_0 = (0, 0)^T$$

et on

$$\delta_0 = (-2, -2)^T$$

$$\gamma_0 = (-2, -4)^T,$$

alors

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

aussi

$$g(x_1) = (1, -1)^T$$

$$d_1 = -S_1 g(x_1) = (-1, \frac{1}{2})^T$$

et

$$t_1 = -\frac{g(x_1)^T d_1}{d_1^T A d_1} = 1.$$

Série N°3

En suite, on a

$$x_2 = x_1 + t_1 d_1 = \left(-1, \frac{1}{2}\right)^T = x^*,$$

puisque f est une fonction à deux variables.

■

Exercice 4 On veut minimiser la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T A x - x^T b; \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et en utilisant la méthode DFP.

3) Calculer les trois premières itérations de l'algorithme DFP pour minimiser f sur \mathbb{R}^2 avec $x_0 = (2, 2)^T$ et $S_0 = I$. Que peut on déduire.

Solution: Si $\delta_k = (\delta_k^1, \delta_k^2)^T$ et $\gamma_k = (\gamma_k^1, \gamma_k^2)^T$, alors

$$S_{k+1} = S_k + \begin{bmatrix} \frac{(\delta_k^1)^2}{\delta_k^1 \gamma_k^1 + \delta_k^2 \gamma_k^2} - \frac{(\gamma_k^1)^2}{(\gamma_k^1)^2 + (\gamma_k^2)^2} & \frac{\delta_k^1 \delta_k^2}{(\gamma_k^1)^2 + (\gamma_k^2)^2} - \frac{\gamma_k^1 \gamma_k^2}{(\gamma_k^1)^2 + (\gamma_k^2)^2} \\ \frac{\delta_k^1 \delta_k^2}{(\gamma_k^1)^2 + (\gamma_k^2)^2} - \frac{\gamma_k^1 \gamma_k^2}{(\gamma_k^1)^2 + (\gamma_k^2)^2} & \frac{(\delta_k^2 - \gamma_k^2)^2}{(\delta_k^1 - \gamma_k^1) \gamma_k^1 + (\delta_k^2 - \gamma_k^2) \gamma_k^2} \end{bmatrix}.$$

$$g(x) = Ax - b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Puisque $x_0 = (2, 2)$ et $S_1 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors

$$g(x_0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$d_0 = -S_0 g(x_0) = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La fonction objective est quadratique ce qui donne

$$t_0 = \arg \min \{f(x_0 + t d_0), t > 0\} = - \frac{g(x_0)^T d_0}{d_0^T A d_0} = \frac{2}{3}$$

donc

$$x_1 = x_0 + t_0 d_0 = (0, 0)^T$$

et on a

$$\begin{aligned} \delta_0 &= (-2, -2)^T \\ \gamma_0 &= (-2, -4)^T, \end{aligned}$$

Série N°2

alors

$$S_1 = \begin{pmatrix} \frac{17}{15} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$$

aussi

$$g(x_1) = (1, -1)^T$$

$$d_1 = -S_1 g(x_1) = \left(-\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)^T$$

et

$$t_1 = -\frac{g(x_1)^T d_1}{d_1^T A d_1} = \frac{5}{6}.$$

En suite, on a

$$x_2 = x_1 + t_1 d_1 = \left(-1, \frac{1}{2}\right)^T = x^*,$$

et

$$\delta_1 = \left(-1, \frac{1}{2}\right)^T$$

$$\gamma_0 = (-1, 1)^T,$$

alors

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

puisque f est une fonction à deux variables. 1P^{ts}

■

Exercice 5 Soit la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - x^T b; \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Où $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

— Calculer les quatre premières itérations de l'algorithme SR1 pour minimiser f sur \mathbb{R}^2 avec $x_0 = (-1, 1)^T$ et $S_0 = I$. Que peut on déduire ?

Solution:

Pour faciliter les calculs, il est possible de calculer la mise à jour de la matrice S_k par la méthode SR1 :

$$S_{k+1} = S_k + \begin{bmatrix} \frac{(\delta_k^1 - \gamma_k^1)^2}{(\delta_k^1 - \gamma_k^1)\gamma_k^1 + (\delta_k^2 - \gamma_k^2)\gamma_k^2} & \frac{(\delta_k^1 - \gamma_k^1)(\delta_k^2 - \gamma_k^2)}{(\delta_k^1 - \gamma_k^1)\gamma_k^1 + (\delta_k^2 - \gamma_k^2)\gamma_k^2} \\ \frac{(\delta_k^1 - \gamma_k^1)(\delta_k^2 - \gamma_k^2)}{(\delta_k^1 - \gamma_k^1)\gamma_k^1 + (\delta_k^2 - \gamma_k^2)\gamma_k^2} & \frac{(\delta_k^2 - \gamma_k^2)^2}{(\delta_k^1 - \gamma_k^1)\gamma_k^1 + (\delta_k^2 - \gamma_k^2)\gamma_k^2} \end{bmatrix}.$$

Série N°3

— D'autre part, si f est une fonction quadratique convexe,

$$\theta(t) = f(x_k + td_k)$$

alors

$$\theta'(t_k) = g(x_k + td_k)^T d_k = ((x_k + td_k)^T A + b^T) d_k = (x_k^T A + b^T) d_k + td_k^T A d_k = g(x_k + td_k)^T d_k$$

$$t_k \text{ est un minimum local pour } \theta \text{ sur }]0, \infty[\Rightarrow \theta'(t_k) = g(x_k + td_k)^T d_k = 0 \Rightarrow t_k = -\frac{g(x_k)^T d_k}{d_k^T A d_k}.$$

— On a

$$g(x) = Ax - b = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Puisque $x_0 = (-1, 1)$ et $S_1 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors

$$g(x_0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d_0 = -S_0 g(x_0) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La fonction objective est quadratique ce qui donne

$$t_0 = \arg \min\{f(x_0 + td_0), t > 0\} = -\frac{g(x_0)^T d_0}{d_0^T A d_0} = \frac{5}{14}$$

donc

$$x_1 = x_0 + t_0 d_0 = \left(-\frac{2}{7}, \frac{9}{14}\right)^T$$

et on

$$\delta_0 = \left(\frac{5}{7}, -\frac{5}{14}\right)^T,$$

$$\gamma_0 = \left(\frac{15}{7}, -\frac{5}{7}\right)^T,$$

alors

$$S_1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{25}{26} \end{pmatrix}$$

aussi

$$g(x_1) = \left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}\right)^T$$

$$d_1 = -S_1 g(x_1) = \left(\frac{9}{91}, \frac{27}{91}\right)^T$$

Série N°2

et

$$t_1 = -\frac{g(x_1)^\top d_1}{d_1^\top A d_1} = \frac{13}{27}.$$

En suite, on a

$$x_2 = x_1 + t_1 d_1 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)^\top,$$

puisque $g(x_2) = (0, 0)^\top$ et f est une fonction strictement convexe alors $x^* = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)^\top$ est un

minimum global stricte de plus $S_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = A^{-1}$.

■