Université Badji Mokhtar-Annaba, Département de Mathématiques

Examen Final (Optimisation non linéaire)

M1COTA S2 2018/2019

Lundi le 17 Juin 2019, Durée : 1h30mn.

Exercice 1 (6 Pts) *Soit f une fonction continûment différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et soit $x \in \mathbb{R}^n$. Supposons que $d \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ est une direction de descente de f en x et soit $\alpha \in]0,1[$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'inégalité*

$$f(x) - f(x + td) \geq -\alpha g(x)^T d$$

soit vraie pour tout $t \in [0, \varepsilon]$.

Solution: La f est continûment différentiable sur $\mathbb{R}^n$, donc

$$f(x + d) = f(x) + tg(x)^T d + o(t \|d\|) \quad \boxed{2P^{ts}}$$

et

$$f(x) - f(x + d) = -\alpha tg(x)^T d - (1 - \alpha)tg(x)^T d - o(t \|d\|). \quad \boxed{1P^{ts}} \tag{1}$$

Puisque d est une direction de descente de f en x, nous avons

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{(1 - \alpha)tg(x)^T d}{t} = (1 - \alpha)g(x)^T d < 0. \quad \boxed{2P^{ts}}$$

Donc, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in]0, \varepsilon]$ l'inégalité

$$(1 - \alpha)tg(x)^T d < 0 \quad \boxed{1P^{ts}}$$

est vérifiée, combinée avec (1), on obtient le resultat.

■

Exercice 2 (4 Pts) *Soit le problème de minimisation de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par*

$$f(x) = x^2 - \frac{x^3}{3}.$$

Supposons qu'on utilise un l'algorithme

$$x_{k+1} = x_k - \alpha f'(x_k)$$

avec un pas $\alpha = 1/2$ et une condition initiale $x_1 = 1$.

1) *Montrer que cet algorithme converge vers un minimum local de f.*

2) *Trouver la vitesse de convergence de cet algorithme.*

Solution:

- Puisque $f'(x) = 2x - x^2$, l'algorithme précédent peut être écrit comme suit

$$x_{k+1} = x_k - \alpha f'(x_k) = \frac{1}{2}x_k^2 \quad \boxed{1P^{ts}}$$

Si $x_1 = 1$, on peut écrire

$$x_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{k-1}-1}, \quad \boxed{1P^{ts}}$$

donc $x_k \to 0$ lorsque $k \to \infty$. Mais $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 2 > 0$, alors $x = 0$ un minimum local stricte pour f. $\boxed{1P^{ts}}$

- Pour la vitesse de convergence quadratique, il suffit de voir que

$$\frac{|x_{k+1} - 0|}{|x_k - 0|^2} = \frac{1}{2}. \quad \boxed{1P^{ts}}$$

■

Exercice 3 (4 Pts) *Soit f une fonction quadratique donnée par*

$$f(x) = \frac{1}{2}x^\top Q\, x + b^\top x.$$

Où Q est une matrice symétrique, définie positive. Soit la méthode de Newton modifiée :

$$\begin{cases} x_{k+1} & = x_k + t_k\, d_k, \\ d_k & = -Q^{-1} g(x_k), \\ t_k & = \arg\min\{f(x_k + t d_k),\ t > 0). \end{cases}$$

1. *Montrer que f possède un minimum strict.*
2. *Calculer le pas t_k donné par la méthode de Newton modifiée pour trouver le minimum de f.*
3. *Montrer que cette méthode trouve le minimum de f après une seule itération.*

Solution: Puisque f est une fonction quadratique de la forme

$$f(x) = \frac{1}{2}x^\top Q\, x + b^\top x.$$

Alors,

$$g(x) = Q\, x + b$$

et

$$H(x) = Q. \quad \boxed{1P^{ts}}$$

1. Calculons le point critique de g $(g(x^*) = 0)$:

$$g(x^*) = 0 \Longleftrightarrow Qx^* + b = 0 \Longleftrightarrow x^* = -Q^{-1}b \quad \boxed{1P^{ts}}$$

Puisque Q est définie positive pur tout $x \in \mathbb{R}^n$, alors x^* est un minimum global strict de f.

2. Calculons d'abord la direction d_k :

$$d_k = -Q^{-1}(Qx_k + b) = -x_k - Q^{-1}b. \quad \boxed{1P^{ts}}$$

Maintenant si on utilise la méthode de Newton modifiée :

$$\begin{cases} x_{k+1} & = x_k + t_k\, d_k, \\ d_k & = -Q^{-1}g(x_k), \\ t_k & = \arg\min\{f(x_k + td_k),\, t > 0). \end{cases}$$

La solution exacte du problème

$$t_k = \arg\min\{f(x_k + td_k),\, t > 0).$$

Est donné par

$$t_k = -\frac{g(x_k)^\top d_k}{d_k^\top Q d_k} \quad \boxed{1P^{ts}}$$

On développant la formule précédente, on s'aperçoit que

$$t_k = -\frac{g(x_k)^\top d_k}{d_k^\top Q d_k} = -\frac{g(x_k)^\top\left(-Q^{-1}g(x_k)\right)}{\left(-Q^{-1}g(x_k)\right)^\top Q d_k} = -\frac{g(x_k)^\top d_k}{\left(-Q^{-1}g(x_k)\right)^\top Q d_k} = -\frac{g(x_k)^\top d_k}{-\left(g(x_k)^\top Q^{-1} Q d_k\right)} = 1.$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ alors

$$x_1 = x_0 + t_0 d_0 = x_0 - 1(x_0 - Q^{-1}b) = x^*. \quad \boxed{1P^{ts}}$$

■

Exercice 4 (6 Pts) *Utiliser la méthode de Newton pour minimiser*

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \cos\, x.$$

Le point initial est $x_0 = 0,5$ *et le test d'arrêt est* $|x_{k+1} - x_k| < \epsilon$, *avec* $\epsilon = 10^{-5}$.

Solution: Soit

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - cos\, x.$$

$$\begin{aligned} g(x) &= x + \sin\, x, \\ H(x) &= 1 + \cos\, x. \quad \boxed{1P^{ts}} \end{aligned}$$

Donc

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x + \sin\, x}{1 + \cos\, x}. \quad \boxed{1P^{ts}}$$

Si $x_0 = 0.5$, alors

$$\begin{aligned}
&x_1 = -0.0216417954;\ g(x_1) = -0.04328190145;\ H(x_1) = 1.999765826,\\
&x_2 = 0.00000168950;\ g(x_2) = 0.0000033790;\ H(x_2) = 2.0,\\
&x_3 = 0\, g(x_2) = 0.0;\ H(x_3) = 2.0;\\
&x_4 = 0; g(x_2) = 0.0;\ H(x_4) = 2.0; \quad \boxed{2P^{ts}}
\end{aligned}$$

Notons que $|x_4 - x_3| < 10^{-5}$et que $g(x_4) = 0$ en plus $f''(x_4) = 2 > 0$ donc $x^* = x_4$ est un minimum local strict. $\boxed{2P^{ts}}$

■