Université Badji Mokhtar-Annaba, Département de Mathématiques

Examen de Rattrapage (Optimisation non linéaire)

M1COTA S2 2018/2019

Dimanche le 14 Juillet 2019, Durée : 1h30mn.

Exercice 1 (7 Pts) *Nous voulons minimiser la fonction définie par*

$$f(x\,,\,y) = 10\,x^2 + 5\,x\,y + 10\,(y-3)^2.$$

Trouver le minimum de cette fonction en utilisant la méthode de la plus profonde pente (steepest descent), avec une recherche linéaire de Cauchy et partant du point initial $(x_0, y_0) = (10.0\,,\,15.0)$ *(prenez une tolérance de l'ordre de* 10^{-3}*).*

Solution: La méthode de la plus profonde pente (steepest descent), avec une recherche linéaire de Cauchy est donnée par

$$(x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_{k+1}, y_{k+1}) - t_k g(x_k, y_k)$$

où $t_k > 0$ vérifie

$$\begin{cases} \theta'(t_k) & = 0, \\ \theta(t_k) & < \theta(0). \end{cases}$$

avec $\theta(t) = f\left((x_k, y_k) - tg(x_k, y_k)\right)$ et $\theta'(t) = -\left[g\left((x_k, y_k) - tg(x_k, y_k)\right)\right]^T g(x_k, y_k)$

- $g(x, y) = (20\,x + 5\,y\,,\,5\,x + 20\,y - 60)^T$ donc $g(x_0, y_0) = (275\,,\,290)^T$,

La première itération de l'algorithme l'algorithme précédent peut être écrit comme suit

$$(x_1, y_1) = (x_0, y_0) - t_0(275\,,\,290).$$

Où $t_0 > 0$ est solution de

$$\theta'(t) = -159725 + 3992000t = 0 \Longleftrightarrow t_0 = 6389/159680 \simeq 0.04001.$$

Donc $(x_1, y_1) = (-32035/31936,\ 54239/159681) \simeq (-1.0031\,,\,3.3967)$

La deuxième itération :

$$(x_2, y_2) \approx (x_1, y_1) - t_1 \left(-\frac{49155}{15968}, \frac{93225}{31936}\right)^T \approx (x_1, y_1) - t_1\,(-3.0783\,,\,2.9191)^T$$

Où $t_1 > 0$, est solution de

$$\theta'(t) \approx -17.99746153 + 270.0886855\,t = 0 \Longleftrightarrow t_1 \simeq 0.0666.$$

Donc $(x_2, y_2) \approx (-0.7979\,,\,3.2022)$.

La troisième itération :

$$(x_3, y_3) \approx (x_2, y_2) - t_2\,(0.0516\,,\,0.0544)^T$$

Où $t_2 > 0$, est solution de

$$\theta'(t) \approx -0.005624 + 0.1405\,t = 0 \Longleftrightarrow t_2 \simeq 0.0400.$$

Donc $(x_3, y_3) \approx (-0.7979\,,\,3.2022)$.

La quatrième itération :

$$(x_4, y_4) \approx (x_2, y_2) - t_3\,(-0.0005776, 0.0005477)^T$$

Où $t_3 > 0$, est solution de

$$\theta'(t) \approx -0.0000006 + 0.000009\,t = 0 \Longleftrightarrow t_3 \approx 0.06666.$$

Donc $(x_4, y_4) \approx (-0.7999\,,\,3.2000)$.

Mais $g(x_4, y_4) \approx (9.6839\,10^{-6}, 1.0212\,10^{-5}) \Rightarrow \|g(x_4, y_4)\| \approx 1.40\,10^{-5}$.

■

Exercice 2 (7 Pts) *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, une fonction de classe $C^2(\mathbb{R}^n)$. Assumons que :*

1. *Il existe $m > 0$ tel que $H(x) - mI$ est définie positive pour tout $\mathbb{R}^n$,*
2. *Il existe $L > 0$ tel que $\|H(x) - H(y)\| \leq L\,\|x - y\|\,,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.*

- *Soit la suite $\{x_k\}$ générée par l'algorithme de Newton et soit x^* l'unique minimum pour f sur $\mathbb{R}^n$. Montrez que pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'inégalité*

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq \frac{L}{2m}\,\|x_k - x^*\|$$

est vérifiée. De plus, si $\|x_0 - x^*\| \leq \dfrac{m}{L}$, alors

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{2m}{L}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^k}\,,\ \ k = 0, 1, 2, ...$$

Exercice 3 (6 Pts) *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, une fonction de classe C^2 sur un ouvert convexe $D \subset \mathbb{R}^n$. Supposons que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe $m > 0$ telle que f satisfait*

$$x^\top H(x)x \geq m\,\|x\|^2\,,\ \ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \ x \in \mathcal{L}(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n :\ f(x) \leq f(x_0)\}\,.$$

Montrer que si la recherche linéaire employée satisfait

$$f(x_{k+1}) - f(x_k + t_k d_k) \geq \eta\,\|g(x_k)\|^2\cos^2\left(-d_k^\top g(x_k)\right),$$

où η est une certaine constante qui ne dépend pas de k, alors la suite $\{x_k\}$ générée par l'algorithme de Newton modifié :

$$\begin{cases} x_{k+1} & = x_k + t_k\, d_k, \\ d_k & = -\left[H^{-1}(x_k)\right] g(x_k), \\ t_k & = \arg\min \left\{ f(x_k + t d_k),\ t > 0) \right\}, \end{cases}$$

satisfait

$$\lim_{k \to \infty} \|g(x_k)\| = 0,$$

et $\{x_k\}$ converge vers le minimum unique de f.

Bonne chance :-)