Module de Mathématiques Statistiques
Chapitre 04 : Variables Aléatoires
Séance 07

Responsables du cours: **Dr. Metiri Farouk** & **Dr. Sadoun Ahmed** & **Dr. Aidi Khaoula,**
Université de Badji Mokhtar -Annaba-

Département de TCSNV

2021/2022

Mail address: fmetiri@yahoo.fr
saadounahmed1@yahoo.fr
khaoula.aidi@yahoo.fr

4.1 Variables Aléatoires Discrètes

En 1654, Blaise Pascal (1623 – 1662) entretient avec Pierre de Fermat (1601 – 1665) des correspondances sur le thème des jeux de hasard et d'espérance de gain qui les mènent à exposer une théorie nouvelle : les calculs de probabilités.

Ils s'intéressent à la résolution de problèmes de dénombrement comme par exemple celui du **Chevalier de Méré**:

«Comment distribuer équitablement la mise à un jeu de hasard interrompu avant la fin?»

Définition 01 :

Etant donné un espace probabilisé d'espace fondamental Ω et de mesure de probabilité P, on appelle **variable aléatoire** sur cet espace, toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{aligned} X :\quad & \Omega \to \mathbb{R} \\ & \omega \to X(\omega) \end{aligned}$$

La variable aléatoire X est dite discrète si elle prend un **nombre fini** ou **infini dénombrable** de valeurs.
Exemple 01. On lance une pièce de monnaie 3 fois.
l'ensemble des résultats possibles (univers des possibles) est

$$\Omega = \{PPP, PPF, FPP, PFP, PFF, FPF, FFP \; et \; FFF\}$$

On définit une variable X représentant le nombre de Piles P obtenues.
Alors les valeurs de X sont $\{0, 1, 2 \; et \; 3\}$.
Dans l'exemple 01: $X = 0$ correspond au cas où on n'a pas de Piles P c'est à dire:
$\{X = 0\} = \{FFF\}$
$\{X = 1\} = \{PFF, FPF, FFP\}$,
$\{X = 2\} = \{PPF, FPP, PFP\}$
$\{X = 3\} = \{PPP\}$.

Exemple 02. On jette deux dés distincts et on s'intéresse à la somme des points. On note X cette variable aléatoire, Alors l'ensemble des valeurs possibles de X est $\Omega = \{2, 3, 4, ..., 12\}$

4.1.1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Définition 02 :
Soit X une v.a.d. On appelle loi de probabilité ou distribution de probabilité de la v.a. X l'application

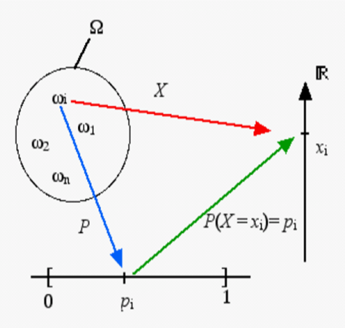
$$\begin{array}{ccc} p & : & R \to [0,1] \\ x & \to & p(x) = P(X = x) \end{array}$$

Propriétés :

$$1. \forall x \in R, p(x) \geq 0$$

$$2. \sum_{x \in R}, p(x) = 1.$$

La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète est entièrement déterminée par les probabilités p_i des événements $\{X = x_i\}$, x_i parcourant l'univers $X(\Omega)$. La loi de probabilité est donnée par les (x_i, p_i)



On reprend l'exemple 01, on a:

$$\begin{aligned} p(0) &= P(X=0) = P(\{FFF\}) = \frac{1}{8} \\ p(1) &= P(X=1) = P(\{PFF, FPF, FFP\}) = \frac{3}{8} \\ p(2) &= P(X=2) = P(\{PPF, FPP, PFP\}) = \frac{3}{8} \\ p(3) &= P(X=3) = P(\{PPP\}) = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

On écrit en général la loi sous la forme suivante:

Nombre de piles: x	0	1	2	3	$\sum_0^3 p(x)$
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=1$

Fonction de répartition

Soit X une v.a. On appelle fonction de répartition de la v.a. X (discrète ou continue), la fonction F_X définie par

$$\begin{array}{ccc} F_X & : & R \longrightarrow [0,1] \\ x & \longrightarrow & P(X \leq x) \end{array}$$

L'importance pratique de la fonction de répartition est qu'elle permet de calculer la probabilité de tout intervalle sur R.

Propriétés de la fonction de répartition

Soit F_X la fonction de répartition d'une **variable aléatoire discrète** X alors :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad 0 \leq F_X(t) \leq 1$$

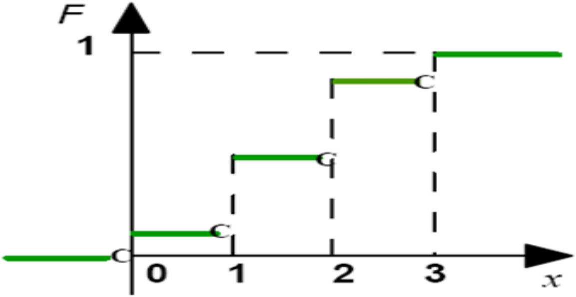
F_X est croissante sur $\mathbb{R}$

$$\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0 \quad \text{et} \lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$$

$$\text{si } a \leq b \quad P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

On reprend l'exemple 01, on a

Nombre de piles: x	$P(X=x)$	$F_X(x)$
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8}$
2	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}+\frac{1}{8}=1$


F
1
0
1
2
3
x

4.1.2 Espérance Mathématique

Définition 03 : Soit X une variable aléatoire discrète ayant pour valeurs possibles $x_1, x_2, \cdots$ et pour distribution de probabilité $p(x)$. La valeur moyenne d'une variable aléatoire est appelée **l'espérance mathématique** de X donnée par

$$E\left[X\right] = \sum_{i \geq 1} x_i p(x_i) = \sum_{i \geq 1} x_i p(X = x_i)$$

à condition que la série ci-dessus soit absolument convergente, sinon on dira que X n'admet pas d'espérance mathématique.

De la même manière, on peut écrire

$$E\left[X^k\right] = \sum_{i \geq 1} (x_i)^k \, p(x_i)$$

qui s'appelle le **moment d'ordre K** de la v.a X.

Remarque

- Si X a un nombre fini de valeurs alors $E[X]$ existe.
- On a besoin du moment d'ordre 2 $\left(E\left[X^2\right]\right)$ pour calculer la variance de la v.a X.
- Si X et Y sont deux v.a indépendantes $\Longrightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$

Propriétés de l'espérance

Les propriétés de l'espérance valent aussi bien pour une v.a discrète ou une v.a absolument continue.

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω, admettant une espérance, alors :

(P_1) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

(P_2) $E(aX)=aE(X) \quad \forall a \in \mathbb{R}$

(P_3) Si $X \geq 0$ alors $E(X) \geq 0$

(P_4) Si X est un caractère constant tel que : $\forall \omega \in \Omega \quad X(\omega)=k$ alors $E(X)=k$

On reprend l'exemple 01,

$$E\left[X\right] = \sum_{i\geq 1} x_i p(x_i) = \left(0.\frac{1}{8}\right) + \left(1.\frac{3}{8}\right) + \left(2.\frac{3}{8}\right) + \left(3.\frac{1}{8}\right) = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

Le **moment d'ordre 2** de la v.a X. est donné par

$$E\left[X^2\right] = \sum_{i\geq 1} \left(x_i\right)^2 p(x_i) = \left(0^2.\frac{1}{8}\right)+\left(1^2.\frac{3}{8}\right)+\left(2^2.\frac{3}{8}\right)+\left(3^2.\frac{1}{8}\right) = \frac{24}{8} = 3$$

4.1.3 Variance mathématique

Définition 04 : La variance $V(X)$ d'une v.a est l'espérance mathématique de l'écart à l'espérance mathématique. C'est un **paramètre de dispersion** qui correspond au moment centré d'ordre 2 de la v.a X.

Si X est une v.a ayant une espérance $E[X]$, on appelle variance de X le réel

$$V(X) = E(X - E[X])^2 = E\left[X^2\right] - (E[X])^2$$

Si X est une v.a discrète de loi de probabilité (x_i, p_i), définie sur un nombre fini d'événements élémentaires, alors la variance est égale à:

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E[X])^2 p_i = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i\right) - (E[X])^2$$

Remarque

$$V(X) = E\left[X^2\right] - \left(E\left[X\right]\right)^2$$

alors on peut écrire

$$E\left[X^2\right] = V(X) + \left(E\left[X\right]\right)^2$$

On appelle écart type de X la quantité

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

Remarques

- La variance et l'écart type ne sont jamais négatifs.
- L'écart type représente l'écart moyen (la distance moyenne) entre la variable et sa moyenne. Elle mesure la dispersion d'une variable:
  - Plus l'écart-type est grand $\uparrow$ plus la variable prend des valeurs qui peuvent être éloignées les unes des autres.
  - Plus l'écart-type est petit $\downarrow$ plus la variable prend des valeurs proches de sa moyenne.
- Si $E[X] = 0$ on dit que la variable aléatoire est centrée
- Si $V(X) = 1$ on dit que la variable aléatoire est réduite.

On reprend l'exemple 01,

$$
\begin{aligned}
V(X) &= E\left[X^2\right] - (E\left[X\right])^2 = 3 - \left(\frac{12}{8}\right)^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} > 0 \\
\sigma &= \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

- **à faire** : Reprendre **l'exemple 02 (somme des deux dés)** et chercher la loi de probabilité, l'espérance, et la variance de la variable aléatoire X.