Module de Mathématiques Statistiques Chapitre 1 : Fonction d'une variable réelle Séance 01

Responsable du cours: **Dr. Metiri Farouk et Dr. Sadoun Ahmed,**
Département de TCSNV
Université de Badji Mokhtar -Annaba-

Mail address: fmetiri@yahoo.fr

Section 1.1: Rappels et Définitions

1.1 Notions d'une fonction

• Une fonction est un procédé qui permet d'associer à un nombre x d'une partie X, un unique autre nombre y d'une partie Y appelé image.

•Si on appelle cette fonction f, l'image de x par f sera notée

$$\begin{array}{ccc} f & : & X \longrightarrow Y \\ x & \longrightarrow & y = f(x) \end{array}$$

1.2 Domaine de Définition

On appelle domaine de définition d'une fonction f, l'ensemble des éléments x pour lesquels une fonction est définie, c'est-à-dire pour lesquels on sait calculer $f(x)$.

$$D_f = \{x \in X \text{ tq } f(x) \in Y\}$$

Détermination pratique de l'ensemble de définition

Trois cas génériques : Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux fonctions.

1^{er} cas : fonction du type $f(x) = \frac{P}{Q}$: f est définie pour tout $Q \neq 0$

$2^{éme}$ cas : fonction du type $f(x) = \sqrt{Q}$: f est définie pour tout $Q \geq 0$:

$3^{éme}$ cas : fonction du type $f(x) = \frac{P}{\sqrt{Q}}$: f est définie pour tout $Q > 0$

Exemples:

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes

$$1) f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{3x^2 - 7x + 2}$$

$$2) g(x) = \frac{x^3 + 5x}{\sqrt{8 - 3x}}$$

1.4 Fonctions monotones

• Soit f une fonction définie sur un intervalle I vers $\mathbb{R}$.

- On dit que f est monotone croissante sur I si:

$$Si \qquad x_1 \leq x_2 \qquad alors \qquad f(x_1) \leq f(x_2).$$

- On dit que f est monotone décroissante sur I si:

$$Si \qquad x_1 \leq x_2 \qquad alors \qquad f(x_1) \geq f(x_2).$$

- f est dite strictement croissante (résp décroissante) si les inégalités précédentes sont strictes.

Limites:

Soit f une fonction $y = f'x)$ définie sur un intervalle I contenant le point x_0.

On dit que f admet pour limite en ce point x_0 le nombre réel l ssi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0 \text{ tels que } \forall x \in I$$

$$0 < |x - x_0| < \eta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

On note $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l$

On dit aussi que f(x) tend vers l lorsque x tend vers x_0

Il existe des cas où la détermination de la limite n'est pas tout de suite évidente. Il faut alors pousser l'analyse à l'aide des croissances comparées, des fonctions équivalentes ou autres triturations algébriques telles que changements de variables. Il existe quatre formes indéterminées (**FI**) algébriques et trois formes exponentielles. Formes indéterminées algébriques:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, \infty - \infty$$

Formes indéterminées exponentielles:

$$0^0, \infty^0, 1^\infty$$

Opérations sur les limites

1) Limite d'une somme

$\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} \left(f(x) + g(x)\right) =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

2) Limite d'un produit

$\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	L	$L > 0$	$L < 0$	$L > 0$	$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x \to a} g(x) =$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} \left(f(x)g(x)\right) =$	$L\,L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

3) Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) =$	L	L	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) =$	$L' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 avec $g(x) > 0$	0 avec $g(x) > 0$	0 avec $g(x) < 0$	0 avec $g(x) < 0$	0	$L' > 0$	$L' < 0$	$L' > 0$	$L' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$	$\dfrac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Quelques limites usuelles

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1, \\
\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x} &= 0 \\
\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= 1, \\
\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1, \\
\lim_{x \longrightarrow \infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} &= e
\end{aligned}$$

De façon générale, on a: $\lim_{x \longrightarrow \infty} (1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e$