Exercices supplémentaires

Optimisation non linéaire, Master 1 (COTA)

Exercice 1 : *Montrer la proposition suivante :*
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, continûment différentiable sur un ouvert convexe $D \subset \mathbb{R}^n$. Soit g (le gradient de f) Lipschitzien en $x \in D$. Alors pour tout $x + d \in D$, on a

$$\left\| f(x+d) - f(x) - g(x)^T d \right\| \leq \frac{\gamma}{2} \|d\|^2 .$$

Exercice 2 : *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = -2x^2 + xy^2 + 4x^4$.*

1. *La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}^2$?*
2. *Déterminer les point critiques de f, est préciser leur nature (minimum local/global, maximum local/global, point-selle, ...). Résoudre alors le problème*

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x).$$

Exercice 3 : *Soit f une fonction donnée par*

$$f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2$$

Où $p, n \in \mathbb{N} - \{0\}$ et $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ est une matrice rectangulaire, $b \in \mathbb{R}^p$.

1. *Montrer que f est une fonctionnelle quadratique et préciser la matrice carrée $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le vecteur $b' \in \mathbb{R}^n$ et la constante $c' \in \mathbb{R}$ à f.*
2. *Donner l'expression du gradient g et de la matrice hessienne H de f en tout point $x \in \mathbb{R}^n$ (on pourra se référer à un résultat du cours plutôt que de faire les calculs).*
3. *Montrer que f est convexe.*
4. *Montrer que f est fortement convexe si et seulement si $\ker(A) = \{0\}$.*
5. *Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $g(x) \neq 0$. Rappeler la définition d'une direction de descente $d \in \mathbb{R}^n$ au point x et montrer que $d \in \mathbb{R}^n$ est une direction de descente si et seulement si*

$$(Ax - b)^\top Ad < 0$$

(en particulier $Ad \neq 0$).

6. *Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $g(x) \neq 0$ et d une direction de descente au point x. Montrer que le problème d'optimisation*
$$\min_{t>0} f(x+td) \tag{RL}$$
admet une unique solution donnée par
$$t^* = -\frac{g(x)^\top d}{\|Ad\|^2}.$$
On suppose désormais que $ker(A) = \{0\}$. Soit le problème
$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \tag{P}$$
et soit la méthode de la plus profonde descente, relative au problème (P), donnée pour tout $k \in \mathbb{N}$, par :
   (i) $d_k = -g(x_k)$,
   (ii) $t_k > 0$ *et solution du problème (RL),*
   (iii) $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$.
7. *Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $d_{k+1}^\top d_k = 0$.*
8. *Calculer analytiquement les solutions de (P).*
9. *Exprimer x_{k+1} en fonction de x_k, A' et b'.*

Exercice 4 *: Soit $A = (a_{i,j})_{1\le i,\, j\le n}$ une matrice $n \times n$ symétrique*

— A *est dite à diagonale dominante si*
$$|a_{i,i}| \geq \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|\,,$$
pour tout $i = 1,\, 2\,, ...,\, n$.

— A *est dite à diagonale strictement dominante si*
$$|a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|\,,$$
pour tout $i = 1,\, 2\,, ...,\, n$.

1) *Montrer que si A est à diagonale dominante tel que les éléments diagonaux sont tous positifs. Alors A est une matrice semi-définie positive.*

2) *Montrer que si A est à diagonale strictement dominante tel que les éléments diagonaux sont tous strictement positifs. Alors A est une matrice définie positive.*

3) *Montrer la relation*
$$\min \sigma(A) \leq \frac{x^\top A x}{\|x\|} \leq \max \sigma(A),\ \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}\,.$$

Exercice 5 *: Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et coercive.*

1. *Montrer que f admet un minimum global.*
2. *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.*
   (a) *Montrer que la fonction f est coercive.*
   (b) *La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}^2$?*
   (c) *Déterminer les point critiques de f, est préciser leur nature (minimum local, maximum local, point-selle, ...). Résoudre alors le problème*

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x).$$

Exercice 6 *:*

1. *Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ x & \text{si } x = 0 \end{cases}$ admet des dérivées partielles au point $(0,0)$, mais n'est pas continue en $(0,0)$.*
2. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n)$.*
   (a) *Montrer que l'application $J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $J(x) = \|Ax\|^2$, où la notation $\|.\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$, est différentiable et calculer sa différentielle.*
   (b) *Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $G : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $G(x) = f(J(x))$ est différentiable et calculer sa différentielle.*

Exercice 7 *: On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.*

1. *Montrer que la fonction f est coercive, c'est-à-dire*

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

2. *La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}^2$?*
3. *Déterminer les point critiques de f, est préciser leur nature (minimum local, maximum local, point-selle, ...). Résoudre alors le problème*

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x).$$

Exercice 8 *: Soit f une fonction quadratique, $f(x) = \dfrac{1}{2} x^\top Q\, x + b^\top x + c$. Où $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n)$ est une matrice symétriques définie positive, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. Soit le problème*

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \qquad \text{(P)}$$

et soit la méthode de la plus profonde descente, relative au problème (P), donnée pour tout $k \in \mathbb{N}$, par :

(i) $d_k = -g(x_k)$,

(ii) $t_k > 0$ *et solution du problème :* $\min_{t>0} f(x_k + td_k)$,

(iii) $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$.

1. *Montrer que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^n$.*
2. *Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, d_k est une direction de descente.*
3. *Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $d_{k+1}^\top d_k = 0$.*
4. *Calculer analytiquement les solutions de (P).*
5. *Exprimer x_{k+1} en fonction de x_k, Q et b.*

Exercice 9 *: Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, différentiable en $\bar{x}$. Montrer la proposition suivante :*

Si f est convexe sur $\mathbb{R}^n$ et si $g(\bar{x}) = 0$ alors $\bar{x}$ est un minimum global.

Exercice 10 *: Calculer le gradient $g(x)$ et le hessien $H(x)$ de la fonction Rosenbrock*

$$f(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2$$

Montrer que $x^* = (1\,,\,1)^T$ est le seul minimum local de cette fonction

Exercice 11 *: Montrer que la fonction $f(x_1, x_2) = 8x_1 + 12x_2 + x_1^2 - 2x_2^2$ a un seul point stationnaire, et que ce n'est ni un maximum et ni un minimum, mais un point de selle.*

Exercice 12 *: Considérons la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *Cette matrice est elle définie positive, définie négative ou indéfinie ?*
2. *Est-elle définie positive, définie négative ou indéfinie sur le sous espace*

$$E = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\}?$$

Exercice 13 *: Est ce que la forme quadratique*

$$f(x) = x^\top \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x$$

est convexe, concave ou ni l'un ni l'autre ?

Exercice 14 *: Les fonctions données par leurs graphes dans la figure 1, admettent-elle des extremas globaux, des extremas locaux ou ni les uns ni les autres ? Identifier les extremas s'ils existent et justifier vos réponses.*

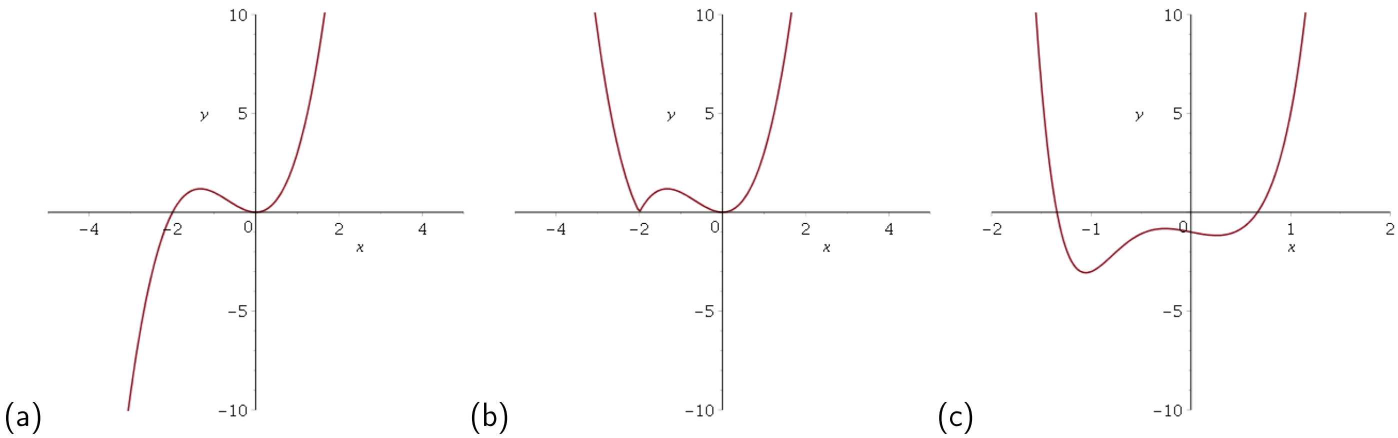

FIGURE 1 – Extremas ?

Exercice 15 *: Montrer que si une suite $\{x_k\}$ converge Q-superlinéairement vers x^*, alors*

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \frac{\|x_{k+1}-x_k\|}{\|x_{k+1}-x^*\|} = 1.$$

Le contraire est-il vraie ?

Exercice 16 *: Soit le problème d'optimisation*

$$\min_{x\in]1\,,\,2[} f(x)$$

où $f(x) = x^2 - \dfrac{x^3}{3}$.

1. *Montrer que l'algorithme du gradient à pas constant :*

$$x_{k+1} = x_k - t f'(x_k)$$

   avec $t = \dfrac{1}{2}$ et $x_0 = 1$, converge globalement vers un minimum local x^* de f.

2. *Trouver l'ordre de convergence de cet algorithme.*

Exercice 17 *:*
1) Soit $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ une matrice définie positive.

a. *Montrer que les éléments diagonaux sont tous positifs.*

b. *Montrer que s'il existe un élément diagonal positif et un autre négatif, alors A n'est pas définie.*

2) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est défini positive.

Exercice 18 *: Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe. Montrer qu'il existe au plus un point minimum de f sur $\mathbb{R}^n$.*

Exercice 19 *: Considérons la fonction donnée par*

$$f(x, y) = 2\,x^3 + 3\,y^2 + 3\,x^2 y - 24\,y$$

Trouver et classifier tous les points stationnaires de f.

Exercice 20 *: Soit le problème de minimisation suivant*

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x)$$

et $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite générée par l'algorithme de la plus profonde descente (Steepest Descent)

(i) $d_k = -g(x_k)$

(ii) t_k *solution de*

$$\min_{t>0} f(x_k + t d_k)$$

qui vérifie

$$f(x_k + t_k d_k) < f(x_k)$$

(iii) $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$.

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$(x_{k+2} - x_{k+1})^\top (x_{k+1} - x_k) = 0.$$

Exercice 21 *: Montrez la proposition suivante :*
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, s'il existe une constant $m > 0$ vérifiant

$$d^\top H(x) d \geq m \|d\|^2 ;\ \forall x, d \in \mathbb{R}^n.$$

Alors, pour tout vecteur $y \in \mathbb{R}^n$; l'ensemble

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R}^n :\ f(x) \leq f(y)\} \tag{1.20}$$

est convexe et compact.

Exercice 22 *: Pour la fonction définie par*

$$f(x, y) = x^2 + 2\,y^2 + 4\,x + 4\,y.$$

— *Montrer que la méthode "steepest desent" appliquée avec le point initial* $(x_0, y_0) = (0, 0)$ *génère une suite* $\{x_k\}$ *telle que*

$$x_{k+1} = \left(\frac{2}{3^k} - 2\,,\, \left(-\frac{1}{3}\right)^k - 1 \right)^T$$

— *Déduisez le minimum de* f*.*

Exercice 23 *: Soit la fonction de Rosenbrock définie par :*

$$f(x, y) = 100\,(y - x^2)^2 + (1 - x)^2.$$

1. *Calculer le gradient* g *et le hessien* H *de* f*.*
2. *Trouver* $(x^*\,,\, y^*)$*, l'unique point stationnaire de* f *.*
3. *Montrer que* $(x^*\,,\, y^*)$ *est un minimum local strict.*
4. *Montrer que* $H(x\,,\, y)$ *est singulière si et seulement si* $y - x^2 = \dfrac{1}{20}$.

Exercice 24 *: Montrez la proposition suivante :*
Si $f\,:\, \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *est une fonction convexe sur* $\mathbb{R}^n$*, alors tout minimum local* x^* *est un minimum global pour* f *et si de plus,* f *est différentiable, alors tout point stationnaire* x^* *est un minimum global pour* f*.*

Exercice 25 *: Soit le problème de minimisation de la fonction* $f\,:\, \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *donnée par*

$$f(x) = x^2 - \frac{x^3}{3}.$$

Supposons qu'on utilise un l'algorithme

$$x_{k+1} = x_k - \alpha f'(x_k)$$

avec un pas $\alpha = 1/2$ *et une condition initiale* $x_1 = 1$*.*

1) *Montrer que cet algorithme converge vers un minimum local de* f*.*

2) *Trouver la vitesse de convergence de cet algorithme.*

Exercice 26 *: Nous voulons minimiser la fonction définie par*

$$f(x\,,\, y) = 10\,x^2 + 5\,x\,y + 10\,(y - 3)^2.$$

Trouver le minimum de cette fonction en utilisant la méthode de la plus profonde pente (steepest descent), avec une recherche linéaire de Cauchy et partant du point initial $(x_0, y_0) = (10\,,\, 15)$ *(prenez une tolérance de l'ordre de* 10^{-3}*).*