Université Badji Mokhtar-Annaba, Département de Mathématiques

# Examen Final (Optimisation non linéaire)

Master 1 COTA, S1-2020/2021

*Jeudi, le 01 Avril 2021, durée : 1 heure.*

---

**Exercice 1 (4 Pts)** *On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \textit{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

*La fonction $f$ est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$ ? de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ ?*

**Solution:** La fonction $f$ est $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ en tant que produit, quotient ne s'annulant pas de fonctions qui le sont. Reste à étudier la régularité en $(0,0)$. On a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, f(x,y) \leq \frac{|x|^3}{x^2} + \frac{|y|^3}{y^2} = |x| + |y| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

$f$ est donc continue en $(0,0)$ $\boxed{2P^{ts}}$. En revanche, $f$ n'est pas de classe $C^1$ en ce point car elle n'est même pas différentiable en $(0,0)$. En effet, soit $t \neq 0$ et $(x,y) \neq (0,0)$. On a

$$\frac{f(tx,ty) - f(0,0)}{t} = \frac{t^3(x^3+y^3)}{t^3(x^2+y^2)} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

Or, si $f$ était différentiable en $(0,0)$, cette limite coïnciderait avec $df(x,y)|_{(x,y)=(0,0)}$ et serait en particulier linéaire par rapport à $(x,y)$ ce qui n'est pas le cas. $\boxed{2P^{ts}}$

■

**Exercice 2 (6 Pts)** *Résoudre le problème d'optimisation sans contraintes*

$$\min_{x\in\mathbb{R}} f(x),$$

*pour les fonctions réelles suivantes :*

- **(a)** $f : x \longmapsto x^3 + 2x^2$,
- **(b)** $f : x \longmapsto 2x^3 + 5x^2 - x - 1$,
- **(c)** $f : x \longmapsto 2x^4 + 5x^3 - x^2$.

**Solution:**

**(a)** Pour la fonction $f : x \longmapsto x^3 + 2x^2$, $f'(x) \equiv g(x) = 3x^2 + 4x$ et $f''(x) \equiv h(x) = 6x + 4$. Les point critiques de $f$ sont solution de l'équation $g(x) = 0$, ce qui nous donne

$$x_1^* = 0 \text{ et } x_2^* = -\frac{4}{3}$$

de plus $h(x_1^*) = 4 > 0$ et $h(x_2^*) = -3 < 0$ donc (d'après les conditions suffisantes d'optimalité de second ordre) $x_1^*$ est un minimum local pour $f$. $\boxed{2P^{ts}}$

**(b)** Pour la fonction $f : x \longmapsto 2x^3 + 5x^2 - x - 1$, $f'(x) \equiv g(x) = 6x^2 + 10x - 1$ et $f''(x) \equiv h(x) = 12x + 10$. Les point critiques de $f$ sont solution de l'équation $g(x) = 0$, ce qui nous donne

$$x_1^* = -\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{31} \text{ et } x_2^* = -\frac{5}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{31}$$

de plus $h(x_1^*) = \sqrt{31} > 0$ et $h(x_2^*) = -\sqrt{31} < 0$ donc (d'après les conditions suffisantes d'optimalité de second ordre) $x_1^*$ est un minimum local pour $f$. $\boxed{2P^{ts}}$

**(c)** Pour la fonction $f : x \longmapsto 2x^4 + 5x^3 - x^2$, $f'(x) \equiv g(x) = 8x^2 + 15x^2 - 2x$ et $f''(x) \equiv h(x) = 12x + 10$. Les point critiques de $f$ sont solution de l'équation $g(x) = 0$, ce qui nous donne

$$x_1^* = 10,\ x_2^* = \frac{23}{2} \text{ et } x_3^* = -14$$

de plus $h(x_1^*) = 10 > 0$, $h(x_2^*) = \dfrac{23}{2} > 0$ et $h(x_3^*) = -14 < 0$ donc (d'après les conditions suffisantes d'optimalité de second ordre) $x_1^*$ et $x_2^*$ sont des minimas locaux pour $f$. $\boxed{2P^{ts}}$

■

**Exercice 3 (10 Pts)** *On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par*

$$f(x, y) = x^2 - 8\,xy + \alpha\,y^2 + x - y;\ \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

.

1. *Écrire $f$ sous la forme*
$$f(u) = u^T A u - b^T u;\ \ u \in \mathbb{R}^2,$$
*où $A$ est une matrice carrée dans $\mathbb{R}^2$ et $b \in \mathbb{R}^2$.*
2. *Calculer le gradient $g$ et le hessien $h$ de $f$ en fonction de $A$ et $b$.*
3. *Pour quelles valeurs du paramètre $\alpha$, la direction $d = A^{-1}g(u)$ est une direction de descente ?*
4. *Déterminer les point critiques de $f$, est préciser en fonction de $\alpha$ leurs natures (minimum local/global, maximum local/global, point-selle, ...).*

**Solution:** .

1.
$$f(u) = u^T A u - b^T u = \frac{1}{2}u^T(2A)u + (-b)^T u;\ \ u \in \mathbb{R}^2,$$
avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ et $b = (-1, 1)^T$. $\boxed{3P^{ts}}$

2. Comme $f$ peut être écrite sous la forme $f(u) = \frac{1}{2}u^T(2A)u + (-b)^T u;\ u \in \mathbb{R}^2$, alors $g(x,y) = \frac{1}{2}(2A + 2A^T)(x,y)^T - b^T = (A + A^T)(x,y)^T - b^T = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 8 & 2\alpha \end{pmatrix}(x,y)^T - b^T =$ $(2x - 8y + 1, -8x + 2\alpha y - 1)^T$ et $h(x,y) = \frac{1}{2}(2A{+}2A^T) = A{+}A^T = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -8 & 2\alpha \end{pmatrix}$. $\boxed{4P^{ts}}$

3. $d = A^{-1}g(u)$ est une direction de déscente si $(A^{-1}g(u))^T g(u) < 0$. Puisque $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{\alpha} \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}$, les valeurs propres de $A^{-1}$ sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 1/\alpha$. Puique $\lambda_1 > 0$, alors pour tout $\alpha > 0$, $A^{-1}$ est définie positive. Si $\alpha < 0$ alors $A^{-1}$ est indéfinie. $\boxed{1P^{ts}}$

4. $g(x,y) = (0,0)^\top \Leftrightarrow (x^*,y^*) = \frac{1}{2}\left(\frac{-4+\alpha}{-16+\alpha}, \frac{3}{-16+\alpha}\right)$. Maintenant, puisque

$$h(x^*,y^*) = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -8 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

les valeurs propres de cette matrice sont $\lambda_1 = 1 + \alpha + \sqrt{65 - 2\,\alpha + \alpha^2}$ et $\lambda_1 = 1 + \alpha - \sqrt{65 - 2\,\alpha + \alpha^2}$qui sont positives pour $\alpha > 16$, donc $h(x^*,y^*)$ est définit positive pour $\alpha > 16$, donc $(x^*,y^*)$ est un minimum local strict pour $f$ si $\alpha > 16$.$\boxed{3P^{ts}}$

■