Université Badji Mokhtar-Annaba, Département de Mathématiques

# Examen Final (Optimisation non linéaire)

Master 1 COTA. S2, 2017/2018

*Jeudi le 24 Mai 2018, Durée : 1h30mn.*

---

**Exercice 1** (7 Pts).

*1) Considérons la mise à jour de rang un*

$$H_1 = I + uv^T$$

*où $u, v \in \mathbb{R}^n$ et $u \neq 0$. Trouver les valeurs propres de $H_1$, puis montrer que*

$$\det(H_1) = 1 + u^T v.$$

*2) Soit $u_1,\ u_2,\ v_1,\ v_2 \in \mathbb{R}^n$ et considérons la mise à jour de rang deux*

$$H_2 = I + u_1 u_2^T + v_1 v_2^T.$$

*Montrer que*

$$H_2 = \left(I + u_1 u_2^T\right) \left[I + \left(I + u_1 u_2^T\right)^{-1} v_1 v_2^T\right],$$

*puis, en utilisant la question précédente et le théorème de Sherman-Morrison-Woodburg, montrer que*

$$\det(H_2) = \left(1 + u_1^T u_2\right)\left(1 + v_1^T v_2\right) - \left(u_1^T v_2\right)\left(u_2^T v_2\right).$$

**Théorème** (de Sherman-Morrison-Woodburg). *Soit $A$ une matrice $n \times n$ non singulière et $u, v \in \mathbb{R}^n$. Si $1 + v^T A^{-1} u \neq 0$ , alors la mise à jour de rang un $A + uv^T$ est inversible et*

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u}.$$

**Solution:** .

1) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda$ de $H_1$, on a

$$\left(I + uv^T\right) x = \lambda x \Longleftrightarrow uv^T x = (\lambda - 1)x,$$

donc $x$ est soit parallel à $u \neq 0$ ou orthogonal à $v$. Si $x$ est orthogonal à $v$, alors la valeur propre correspondante est égale à $1$ ; sinon la valeur propre correspondante est égale à $1 + u^T v$ $\boxed{2P^{ts}}$. Puisque le determinant et le produit des valeurs propre d'une matrice, alors

$$\det(H_1) = 1 + u^T v. \boxed{1P^{ts}}$$

2) Soit $u_1,\, u_2,\, v_1,\, v_2 \in \mathbb{R}^n$ et considérons la mise à jour de rang deux

$$H_2 = I + u_1 u_2^T + v_1 v_2^T.$$

Il est facile de remarquer que

$$\left(I + u_1 u_2^T\right)\left[I + \left(I + u_1 u_2^T\right)^{-1} v_1 v_2^T\right] = I + u_1 u_2^T + v_1 v_2^T. \boxed{1P^{ts}}$$

En utilisant la question précédente et le théorème de Sherman-Morrison-Woodburg, on a

$$\begin{aligned}
\det(I + u_1 u_2^T + v_1 v_2^T) &= \left(1 + u_1^T u_2\right)\left[1 + v_2^T \left(I + u_1^T v_2\right)^{-1} v_1^T\right], \\
&= \left(1 + u_1^T u_2\right)\left[1 + v_2^T \left(I - \frac{u_1 u_2^T}{1 + u_1^T u_2}\right) v_1^T\right], \\
&= \left(1 + u_1^T u_2\right)\left(1 + v_1^T v_2\right) - \left(u_1^T v_2\right)\left(u_2^T v_2\right). \boxed{3P^{ts}}
\end{aligned}$$

■

**Exercice 2** (6 Pts). *On veut minimiser la fonction donnée par*

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - x^T b; \;\; x \in \mathbb{R}^2.$$

*Où* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\;\; b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *en utilisant la méthode SR1.*

**1)** *Montrer que si* $\delta_k = (\delta_k^1, \delta_k^2)^T$ *et* $\gamma_k = (\gamma_k^1, \gamma_k^2)^T$*, alors*

$$S_{k+1} = S_k + \begin{bmatrix} \frac{\left(\delta_k^1 - \gamma_k^1\right)^2}{\left(\delta_k^1 - \gamma_k^1\right)\gamma_k^1 + \left(\delta_k^2 - \gamma_k^2\right)\gamma_k^2} & \frac{\left(\delta_k^1 - \gamma_k^1\right)\left(\delta_k^2 - \gamma_k^2\right)}{\left(\delta_k^1 - \gamma_k^1\right)\gamma_k^1 + \left(\delta_k^2 - \gamma_k^2\right)\gamma_k^2} \\ \frac{\left(\delta_k^1 - \gamma_k^1\right)\left(\delta_k^2 - \gamma_k^2\right)}{\left(\delta_k^1 - \gamma_k^1\right)\gamma_k^1 + \left(\delta_k^2 - \gamma_k^2\right)\gamma_k^2} & \frac{\left(\delta_k^2 - \gamma_k^2\right)^2}{\left(\delta_k^1 - \gamma_k^1\right)\gamma_k^1 + \left(\delta_k^2 - \gamma_k^2\right)\gamma_k^2} \end{bmatrix}.$$

**2)** *Montrer que* $t_k = \arg\min\{f(x_k + t d_k),\, t > 0) = -\dfrac{g(x_k)^\top d_k}{d_k^\top A d_k},\;\; k = 0,\, 1,\, 2,\, ....$

**3)** *Calculer les trois premières itérations de l'algorithme SR1 pour minimiser* $f$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *avec* $x_0 = (2, 2)^T$ *et* $S_0 = I$*. Que peut on déduire.*

**Solution:**

1)

$$S_{k+1} = S_k + \begin{bmatrix} \frac{\left(\delta_k^1 - \gamma_k^1\right)^2}{\left(\delta_k^1 - \gamma_k^1\right)\gamma_k^1 + \left(\delta_k^2 - \gamma_k^2\right)\gamma_k^2} & \frac{\left(\delta_k^1 - \gamma_k^1\right)\left(\delta_k^2 - \gamma_k^2\right)}{\left(\delta_k^1 - \gamma_k^1\right)\gamma_k^1 + \left(\delta_k^2 - \gamma_k^2\right)\gamma_k^2} \\ \frac{\left(\delta_k^1 - \gamma_k^1\right)\left(\delta_k^2 - \gamma_k^2\right)}{\left(\delta_k^1 - \gamma_k^1\right)\gamma_k^1 + \left(\delta_k^2 - \gamma_k^2\right)\gamma_k^2} & \frac{\left(\delta_k^2 - \gamma_k^2\right)^2}{\left(\delta_k^1 - \gamma_k^1\right)\gamma_k^1 + \left(\delta_k^2 - \gamma_k^2\right)\gamma_k^2} \end{bmatrix}. \boxed{1P^{ts}}$$

2) Si $f$ est une fonction quadratique convexe,

$$\theta(t) = f(x_k + t d_k)$$

alors

$$\theta'(t_k) = g(x_k + td_k)^T d_k = \left((x_k + td_k)^\top A + b^\top\right) d_k = \left({x_k}^\top A + b^\top\right) d_k + td_k^T A d_k = g(x_k + td_k)^T d_k$$

$t_k$ est un minimum local pour $\theta$ sur $]0\,,\,\infty[ \Rightarrow \theta'(t_k) = g(x_k + td_k)^T d_k = 0 \Rightarrow t_k = -\dfrac{g(x_k)^\top d_k}{d_k^\top A d_k}.$ $\boxed{1P^{ts}}$

3) On a

$$g(x) = Ax - b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Puisque $x_0 = (2\,,\,2)$ et $S_1 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors

$$g(x_0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$d_0 = -S_0 g(x_0) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \boxed{1P^{ts}}$$

La fonction objective est quadratique ce qui donne

$$t_0 = \arg\min\{f(x_0 + td_0),\, t > 0) = -\frac{g(x_0)^\top d_0}{d_0^\top A d_0} = \frac{2}{3}$$

donc

$$x_1 = x_0 + t_0 d_0 = (0\,,\,0)^T \boxed{1P^{ts}}$$

et on

$$\delta_0 = (-2\,,\,-2)^T$$
$$\gamma_0 = (-2\,,\,-4)^T,$$

alors

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

aussi

$$g(x_1) = (1\,,\,-1)^T$$
$$d_1 = -S_1 g(x_1) = (-1\,,\,\frac{1}{2})^T \boxed{1P^{ts}}$$

et

$$t_1 = -\frac{g(x_1)^\top d_1}{d_1^\top A d_1} = 1.$$

En suite, on a

$$x_2 = x_1 + t_1 d_1 = (-1\,,\,\frac{1}{2})^T = x^*, \boxed{1P^{ts}}$$

puisque $f$est une fonction à deux variables.

■

**Exercice 3** (7 Pts). *On veut minimiser la fonction donnée par*

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b; \;\; x \in \mathbb{R}^2.$$

*Où* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et en utilisant la méthode DFP.*

**3)** *Calculer les trois premières itérations de l'algorithme DFP pour minimiser* $f$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *avec* $x_0 = (2,2)^T$ *et* $S_0 = I$. *Que peut on déduire.*

**Solution:** Si $\delta_k = (\delta_k^1, \delta_k^2)^T$ et $\gamma_k = (\gamma_k^1, \gamma_k^2)^T$, alors

$$S_{k+1} = S_k + \begin{bmatrix} \frac{(\delta_k^1)^2}{\delta_k^1\gamma_k^1+\delta_k^2\gamma_k^2} - \frac{(\gamma_k^1)^2}{(\gamma_k^1)^2+(\gamma_k^2)^2} & \frac{\delta_k^1\delta_k^2}{(\gamma_k^1)^2+(\gamma_k^2)^2} - \frac{\gamma_k^1\gamma_k^2}{(\gamma_k^1)^2+(\gamma_k^2)^2} \\ \frac{\delta_k^1\delta_k^2}{(\gamma_k^1)^2+(\gamma_k^2)^2} - \frac{\gamma_k^1\gamma_k^2}{(\gamma_k^1)^2+(\gamma_k^2)^2} & \frac{(\delta_k^2-\gamma_k^2)^2}{(\delta_k^1-\gamma_k^1)\gamma_k^1+(\delta_k^2-\gamma_k^2)\gamma_k^2} \end{bmatrix} . \boxed{1P^{ts}}$$

$$g(x) = Ax - b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Puisque $x_0 = (2\,,\,2)$ et $S_1 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors

$$g(x_0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$d_0 = -S_0 g(x_0) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \boxed{1P^{ts}}$$

La fonction objective est quadratique ce qui donne

$$t_0 = \arg\min\{f(x_0 + td_0),\, t > 0) = -\frac{g(x_0)^\top d_0}{d_0^\top A d_0} = \frac{2}{3} \boxed{1P^{ts}}$$

donc

$$x_1 = x_0 + t_0 d_0 = (0\,,\,0)^T$$

et on a

$$\delta_0 = (-2\,,\,-2)^T$$
$$\gamma_0 = (-2\,,\,-4)^T,$$

alors

$$S_1 = \begin{pmatrix} \frac{17}{15} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{15} & \frac{8}{15} \end{pmatrix} \boxed{1P^{ts}}$$

aussi

$$g(x_1) = (1\,,\,-1)^T$$

$$d_1 = -S_1 g(x_1) = (-\frac{6}{5}\,,\,\frac{3}{5})^T \boxed{1P^{ts}}$$

et

$$t_1 = -\frac{g(x_1)^\top d_1}{d_1^\top A d_1} = \frac{5}{6}.$$

En suite, on a

$$x_2 = x_1 + t_1 d_1 = (-1\,,\,\frac{1}{2x^2x^{22}})^T = x^*, \boxed{1P^{ts}}$$

et

$$\delta_1 = (-1\,,\,\frac{1}{2})^T$$

$$\gamma_0 = (-1\,,\,1)^T,$$

alors

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

puisque $f$est une fonction à deux variables. $\boxed{1P^{ts}}$

■