Module de Mathématiques Statistiques Chapitre 1 : Fonction d'une variable réelle Séance 02

Responsable du cours: **Dr. Metiri Farouk** & **Dr. Sadoun Ahmed** & **Dr. Aidi Khaoula**
Université de Badji Mokhtar -Annaba-

Département de TCSNV

2021/2022

Mail address: fmetiri@yahoo.fr
saadounahmed1@yahoo.fr
khaoula.aidi@yahoo.fr

3. Continuité

- ## 3.1 Fonctions continues en un point
- Déf 3.1: Soit *f* une fonction définie sur un intervalle *I vers IR. a* un point du domaine de définition de *f* . *On dit que f est continue en a si:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

3.2 Continuités à droite et à gauche d'un point

- Déf 3.2: Soit *f* une fonction définie sur un intervalle *I vers IR. a* un point du domaine de définition de *f* . *On dit que f est continue à droite (résp à gauche) de a si:*

$$\lim_{x \xrightarrow{\succ} a} f(x) = f(a)$$

(résp $\lim_{x \xrightarrow{\prec} a} f(x) = f(a)$)

3.3 Continuités sur un intervalle

- Déf 3.3: Soit *f* une fonction définie sur un intervalle *I vers IR*. *On dit que f est continue sur I* si elle est continue sur tout point de *I*

3.4 Opérations algébriques sur les fonctions continues

- Théorème 3.1: Soient f et g deux fonctions continues en un point a de I . Alors on a les propriétés suivantes:
- *1- f+g est* continue en *a,*
- *2- k f est* continue en *a pour tout k réel,*
- *3- Si* $g(a)\neq 0$, *f/g est* continue en *a*

4. Fonctions dérivables.
4.1 Définitions et propriétés.

- 4.1.1 Dérivée d’une fonction en un point.

Déf 4.1: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un poind de I, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique. On dit que f est dérivable au point x_0 si la limite (finie)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe. Cette limite unique s’appelle dérivée de f au point x_0

Exemple 4.1: Calculer la dérivée de $f(x) = x^2$

Déf 4.2: Si le rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie à droite (résp à gauche) du point x_0.

Cette limite est dite dérivée à droite (résp à gauche) de *f* au point x_0 et notée $f'_d(x_0)$ (résp $f'_g(x_0)$).

Exemple 4.2: Calculer la dérivée de $f(x)=|x|$.

4.2 Dérivées successives

- Si f' admet à son tour une fonction dérivée, celle-ci est dite dérivée seconde ou dérivée d'ordre 2 de *f notée* f''*.* On définit par récurrence les dérivées successives de *f.*

$$f^{(n)} = \left[f^{(n-1)} \right]'$$

Exemple: Calculer la dérivée nième de

$$f(x) = \sin x$$

4.3 Opérations sur les fonctions dérivables

- Théorème 4.1: Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$,

  $f, g : I \to \mathbb{R}$ dérivables au point x_0, alors:

1)

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} ; (\alpha f)' = \alpha f'$$

2)*f+g* est dérivables au point x_0 et on a:

$$(f+g)' = f' + g'$$

4.3 Opérations sur les fonctions dérivables

- 3) *fg* est dérivables au point x_0 et on a:

$$(fg)' = f'g + fg'$$

- 4) si $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow f/g$ est dérivable en x_0 et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

4.7 Théorème de Rolle

- Théorème 4.5: Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur [*a,b*] , dérivable sur]a,b[et telle que *f(a)=f(b)*. Alors il existe un point *c* de]a,b[telle que $f'(c)=0$
- Exercice: Appliquer le théorème de Rolle pour la fonction .

$$f(x)=x^3-x \text{ sur } [-1,1]$$

4.9 Règle de l'hopital

- Si *f* et *g* sont deux fonctions dérivables dans un voisinage d'un point *a* et si *f'(x)/g'(x)* admet une limite au point *a*, alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- *Exercice: calculer*
- *1)* $\lim_{x \to a} \frac{\cos x - \cos a}{\sin x - \sin a}$
- *2)* $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^4}$