Module de Mathématiques Statistiques Chapitre 3 : Analyse Combinatoire et Probabilités Séance 05

Responsables du cours: **Dr. Metiri Farouk** & **Dr. Sadoun Ahmed** & **Dr.Aidi Khaoula**
Université de Badji Mokhtar -Annaba-

$1^{ère}$ année -Département de TCSNV-
2021/2022

Mail address: fmetiri@yahoo.fr
saadounahmed1@yahoo.fr
khaoula.aidi@yahoo.fr

3.1. Rappels et compléments d'analyse combinatoire

- L'analyse combinatoire est une branche des mathématiques qui étudie comment dénombrer des objets.
- Pourquoi dénombrer?

Exemple 1 :

- comment classer 2 élèves? 3? 4? ...20?
- Dans un magasin, j'ai le choix entre *trois* téléphones de même dimension et 2 pochettes.

Combien ai-je de choix possibles?

- Le mot de passe de votre compte Gmail (**BIO**????) comporte quatre chiffres entre 0 et 9.

Combien y a-t-il de mots de passe différents?

- On veut garer 3 voitures sur un parking de 5 places. **Combien y a-t-il de possibilités de garer les voitures?**

Comprendre comment compter devient rapidement **important**.

3.1 – Nombre de permutations

3.1.1 – *Permutations sans répétition*

Une permutation sans répétition de n éléments $distincts\,(diff\acute{e}rents)$ est une suite ordonnée de ces n éléments.

Exemple 2

Le nombre 2537 est une permutation du nombre 3752.

Le nombre 7523 est une permutation du nombre 3752.

Le nombre 7533 n'est pas une permutation du nombre 3752.

Propriété :

Le nombre de permutations de n éléments distincts est: $n!$

Exemple 3

1- Combien de nombres de 3 chiffres différents peut-on former avec 1, 3 et 5?

2- Les anagrammes s'invitent dans la plupart des énoncés sur les permutations. Prenons par exemple les lettres R, O, M et E. De combien de façons peut-on les agencer ?

Il y a 4 possibilités pour la première lettre. Pour la deuxième il n'y en a plus que 3. Puis 2 puis une lettre. Le cardinal de l'ensemble des possibilités est $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Il y a 24 possibilités, c'est-à-dire 4!

Donc, pour reprendre notre question, il y a $n!$ façons d'agencer n éléments distincts.

R	O	M	E
R	O	E	M
R	M	O	E
R	M	E	O
R	E	O	M
R	E	M	E
O	R	M	E
O	R	E	M
O	M	R	E
O	M	E	R
O	E	R	M
O	E	M	R
M	R	O	E
M	R	E	O
M	O	R	E
M	O	E	R
M	E	R	O
M	E	O	R
E	R	O	M
E	R	M	O
E	O	R	M
E	O	M	R
E	M	R	O
E	M	O	R

3.1.2 – *Permutations avec répétitions*

Problème:

Trouver le nombre de mots que l'on peut former par permutation des différentes lettres

a– du mot STATISTIQUES

b– du mot VIVA.

c– du mot ANAGRAMME

Considérons un ensemble de n objets divisés en p groupes d'éléments identiques, les groupes comprenant respectivement $n_1, n_2, ...,$et n_p objets (on a donc $n_1 + n_2 + ... + n_p = n$).

Alors, le nombre de permutations de cet ensemble est :

$$\frac{n!}{\Pi(nombre\ de\ répétititons)!}$$

Réponse :

$a-$ La solution passe par la compréhension du nombre de permutations avec répétitions:

Une anagramme du mot **STATiSTiQUES** est une permutation des 12 lettres de ce mot. Il y en a donc, a priori, $12!$

Mais si au sein de ces anagrammes, on « permute » les trois lettres S, on retombe sur le même mot.

Autrement dit, au sein des $12!$ anagrammes, sont comptées deux fois les mots où se permutent les trois lettres S

Pour éviter de compter ces anagrammes deux fois, on doit diviser $12!$ par le nombre de permutations possibles des deux lettres S, soit $3! = 3.2.1 = 6.$

On fait la meme chose avec les autres lettres qui se répètent (la lettre T:3 fois et la lettre i: 2 fois)

Le nombre d'anagrammes différentes du mot **STATiSTiQUES** est donc égal à: $\frac{12!}{3!.3!.2!} = 6652800$

$c-$Le nombre d'anagrammes du mot ANAGRAMME vaut donc: $\frac{9!}{3!.2!}$

$N.B.$ **dans la suite de ce cours,** n **et** p **sont deux entiers naturels.**

3.2 – Arrangements

3.2.1– *Définition d'un arrangement*

Etant donné un ensemble E de n objets, un arrangement de p de ces objets est une suite **ordonnée** de p objets pris parmi ces n objets.

Attention

On tient compte de l'ordre des objets = l'ordre a son importance.

3.2.2 – *Arrangements sans répétition*

Dans un arrangement sans répétition, les p objets de la liste sont tous *distincts (différents)*.

Cela correspond à un tirage **sans remise** **(sans répétition)** et **avec ordre** **(l'ordre est important).**

Le nombre d'arrangements sans répétition de p objets parmi n (avec $0 \leq p \leq n$) est donné par

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

N.B. La permutation sans répétition de n éléments = un arrangement de $p = n$ objets pris parmi n objets$(A_n^n = n!)$.

Exemple 4

- Combien y a-t-il de podiums de 3 coureurs d'un $100m$ d'une course de 8 coureurs?

$(3, 7, 2)$ est un arrangement; $(2, 7, 3)$ en est un autre.$\Longrightarrow A_8^3$

- Combien de nombres de six chiffres distincts peut-on former avec les chiffres $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ *et* 7,
  $\Longrightarrow A_8^6$
- *quinze* chevaux sont partants. Combien de possibilités de **tiercés** dans l'ordre existe-t-il?
  (S'il n'y avait que trois chevaux partants, on se trouverait dans la situation d'une factorielle).

3.2.3 – Arrangements avec répétition = Liste

Dans le cas d'un arrangement avec répétition, les p objets de la liste **ne sont pas nécessairement tous distincts**.

Cela correspond à un tirage avec remise et avec ordre. c-à-d, l'**ordre a son importance**, mais on peut réutiliser un élément (p fois).

Propriété

Le nombre d'arrangements avec répétition de p objets parmi n est n^p .

Exemple 5

- Quel est le nombre de possibilités de codes de carte bancaire à quatre chiffres?.$\Longrightarrow 10^4$

3.3– Nombre de combinaisons

3.3.1– *Définition*

- À la différence de l'arrangement, l'ordre des p éléments pris parmi n n'a aucune importance. La notion de combinaison est essentielle en statistiques et probabilités.
- Une combinaison de p objets pris dans E est un sous-ensemble de p de ces n objets.
- L'ordre n'intervient pas.
- Une combinaison sans répétition correspond à un **tirage sans remise** et **sans ordre**.
- **On ne tient pas compte de l'ordre des objets = l'ordre n'est pas important.**

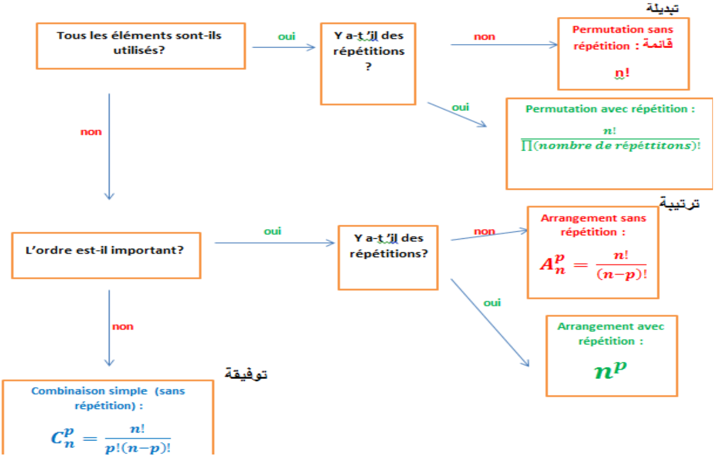
Le nombre de combinaisons sans répétition est donné par

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

$$\begin{cases} C_n^p : \text{notation francophone.} \\ \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} : \text{notation anglosaxone.} \end{cases}$$

Exemple 6

- De combien de manières différentes peut-on choisir une délégation de 3 hommes pris parmi un groupe de 7 hommes? C_7^3
- De combien de manières différentes peut-on choisir une délégation de 2 femmes prises parmi un groupe de 5 femmes? C_5^2
- De combien de manières différentes peut-on choisir une délégation de 3 hommes et 2 femmes pris parmi un groupe de 7 hommes et 5 femmes? $C_7^3 . C_5^2$



Tous les éléments sont-ils utilisés?
oui
Y a-t-'il des répétitions ?
non
تبديلة
Permutation sans répétition : قائمة
n!
oui
Permutation avec répétition :
$\frac{n!}{\prod(nombre\ de\ répéttitons)!}$
non
L'ordre est-il important?
oui
Y a-t-'il des répétitions?
non
ترتيبة
Arrangement sans répétition :
$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
oui
Arrangement avec répétition :
n^p
non
توفيقة
Combinaison simple (sans répétition) :
$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

$$n! = n.(n-1).(n-2)....1$$

Exercice

a- Combien d'équipe de 3 personnes peut-on former à partir de 7 personnes?.

b- De combien de manières différentes peut on élire un président et vice président parmi 10 personnes?

c- Combien y-a-t-il de possibilités d'aligner 15 étudiants dans une salle d'examen?.

à raison de 10 secondes par permutation, combien de temps en minutes faudrait il pour épuiser toutes les possibilités?

d- En lancant 4 fois de suite un dé standard , combien de séquences différentes peut-on obtenir?.

e1- Une urne contient 6 boules de même couleur. De combien de manière différente peut-on retirer 3 boules de l'urne?.

e2- Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6 . De combien de manière différente peut-on retirer 3 boules de l'urne?

f- Combien de série peut-on lire sur un compteur de voitures, ce compteur est composé de 5 cylindres sur chacun dequels sont gravés les chiffres de 0 à 9?.

g- Combien de séries différentes peut-on obtenir en jouant pile ou face 7 fois?.

h- Pendant les minutes qui précèdent une réunion, les trente participants se serrent tous la main, quel est le nombre de poignées de mains échangées entre ces participants?.

Réponses :

a- C_7^3

b- A_{10}^2

c- $15!$

le temps: $15!.10\,\sec ondes = \frac{15!.10\,\sec ondes}{60}\min utes$

d- 6^4

e_1- C_6^3

e_2- A_6^3

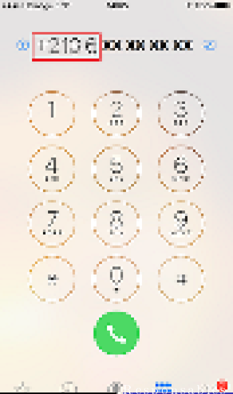
f- 10^5

g- 2^7

h- $C_{30}^2 = 435$

Questions supplémentaires :

1- Un questionnaire à choix multiples, autorisant une seule réponse par question, comprend 15 questions. Pour chaque question, on propose 4 réponses possibles.
De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?
2- Combien peut-on former de numéros de téléphone à 8 chiffres ?
3- Combien peut-on former de numéros de téléphone à 8 chiffres distincts et ne comportant pas le chiffre 0 ?
4- Combien peut-on former de numéros de téléphone portable Mobilis.



5- Six personnes choisissent mentalement un nombre entier compris entre 8 et 13.
Combien de résultats ne comportant pas deux fois le même nombre peut-on obtenir ?

6- Trois personnes choisissent mentalement un nombre entier compris entre 8 et 13.
Combien de résultats ne comportant pas deux fois le même nombre peut-on obtenir ?

7- Les nombres **5**, **-1** et **3** constituent la solution d'un système de trois équations à trois inconnues.
Donner tous les triplets différents qui peuvent être la solution de ce système.

8- Le code confidentiel de la carte monétaire EDDAHABIA est un nombre composé de quatre chiffres tous non nuls. Le code d'une carte est choisi au hasard par un ordinateur.

a- Quel est le nombre des codes composés de chiffres distincts?.

b- Quel est le nombre des codes pairs?.

c- Quel est le nombre des codes qui comportent une seule fois le chiffre 1?