Module de Mathématiques Statistiques Chapitre 03 : Analyse Combinatoire et Probabilités Séance 06

Responsables du cours: **Dr. Metiri Farouk** & **Dr. Sadoun Ahmed** & **Dr. aidi Khaoula**
Université de Badji Mokhtar -Annaba-

Département de TCSNV
2021/2022

Mail address: fmetiri@yahoo.fr
saadounahmed1@yahoo.fr
khaoula.aidi@yahoo.fr

Notions de base

Théorie des probabilités

Décrit le comportement de phénomènes dont le résultat est soumis au hasard permet de modéliser la fréquence de réalisation d'« évènements » aléatoires.

Expérience aléatoire

expérience dont le résultat ne peut pas être déterminé avec certitude a priori.

Ensemble fondamental ou Univers

C'est l'ensemble des résultats possibles ou des événements élémentaires.
On l'appelle aussi l'univers ou l'ensemble probabiliste Ω.

L'événement:

C'est un résultat dont la réalisation est attendue ou non dans le futur.
On distingue entre événement *élémentaire* et événement *composé.*

Exemple 01 : Lancement d'une pièce de monnaie:
L'ensemble fondamental $\Omega = \{P, F\}$.

On peut définir les événements élémentaires suivants:
A:«Obtenir le côté Face»
B:«Obtenir le côté Pile»

L'événement composé:

C'est un résultat dont la réalisation est attendue ou non dans le future sur la base de plusieurs événements élémentaires.

Exemple 02 : Lancer d'un dé régulier

L'ensemble fondamental $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

On peut définir les événements composés suivants:

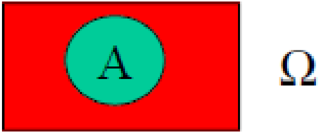
C:«Obtenir un nombre impair»

D:«Obtenir un multiple de 2»

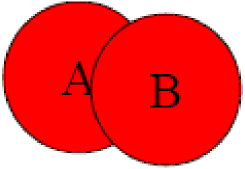
Opérations sur les évènements

Notations	Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire probabiliste
Ω	ensemble plein	événement certain
$\emptyset$	ensemble vide	événement impossible
ω	élément de Ω	événement élémentaire
A	sous-ensemble de Ω	événement
$\omega \in A$	ω appartient à A	ω réalise A
$A \subset B$	A inclus dans B	A implique B
$A \cup B$	réunion de A et B	A ou B
$A \cap B$	intersection de A et B	A et B
A^c ou $\bar{A}$	complémentaire de A	événement contraire de A
$A \cap B = \emptyset$	A et B disjoints	A et B incompatibles

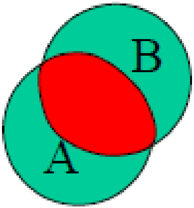
Complémentaire de A $\Rightarrow (\bar{A})$: événement constitué des résultats élémentaires de Ω qui ne sont pas dans A. Soit ω le résultat de l'expérience:



Réunion de A et B $\Rightarrow (A \cup B)$: évènement constitué des résultats élémentaires de Ω qui appartiennent à A ou à B (ou aux deux). Soit ω le résultat de l'expérience:

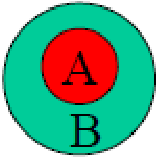


Intersection de A et B $\Rightarrow (A \cap B)$: évènement constitué des résultats élémentaires de Ω qui appartiennent à la fois à **A** et à **B**. Soit ω le résultat de l'expérience:

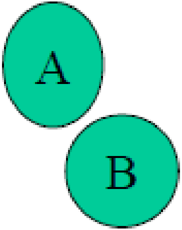


Relations particulières :

Inclusion$\Rightarrow$ $(A \subset B)$**:** **A** est inclus dans B ssi tout élément de A appartient à B :



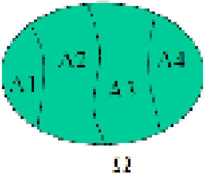
Disjonction ou incompatibilité$\Rightarrow$ $(A \cap B = \emptyset)$**:** A et B sont disjoints ssi A et B n'ont pas d'éléments communs :



Dans l'exemple 02, $C \cap D = \emptyset$ car il n'existe pas un nombre impair et multiple de 2 en même temps.

Système complet d'évènements : Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ n événements. On dit que $(A_1, A_2, ..., A_n)$ constituent un système complet d'événements si

- Ils forment une partition de Ω :



- Ils sont deux à deux incompatibles

$$\forall p \neq q : A_p \cap A_q = \emptyset$$

- Leur réunion est l'événement certain Ω

$$\bigcup_{p=1}^{n} A_p = \Omega$$

· Quelques opérations

$$\circ A \cup \bar{A} = \Omega, A \cap \bar{A} = \emptyset$$

Probabilité

Fonction permettant de « *mesurer* » ou représenter le nombre de chances qu'on a pour obtenir un résultat.

La probabilité d'un événement : On définit la probabilité d un évènement A comme étant le rapport du nombre de cas favorables au nombre de cas possibles.

$$P(A) = \frac{\textbf{Nombre de cas favorables}}{\textbf{Nombre de cas Possibles}}$$

Opérations sur les probabilités

$\cdot P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$ et $0 \leq p \leq 1$

· Si A et B sont deux évènements quelconques, on a

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

· Si A et B sont deux évènements tel que $A \cap B = \emptyset$ alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - 0 = P(A) + P(B)$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

· Si $\Omega = \{A_1, A_2, ..., A_n\} \Rightarrow \sum_i P(A_i) = 1$

Les évènements $A_1, A_2, ..., A_n$ sont dits équiprobables si

$$P(A_1) = P(A_2) = ... = P(A_n)$$

Exemple 03 :

Soient A et B deux événements tels que $P(A) = 0.25$, $P(B) = 0.3$ et $P(A \cap B) = 0.15$.

- Calculer:

$$P(A \mid B), P(B \mid A), P(\bar{A}), P\left(\overline{A \cup B}\right), P\left(\overline{A \cap B}\right), P(\emptyset).$$

Exemple 04 : On jette un dé bien équilibré. Calculer les probabilités des évènements suivants:

- Obtenir un nombre pair.
- Obtenir un nombre premier.
- Obtenir un nombre premier pair.
- Obtenir un nombre premier ou multiple de 2.

Solution :

L'ensemble fondamental $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

A: « Obtenir un nombre pair »$\Rightarrow A = \{2, 4, 6\} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

B: «Obtenir un nombre premier »$\Rightarrow B = \{2, 3, 5\} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

C: «Obtenir un nombre premier pair »$\Rightarrow C = \{2\} \Rightarrow P(C) = \frac{1}{6}$

D: «Obtenir un nombre premier *ou* multiple de 2

»$\Rightarrow D = \{2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow P(D) = \frac{5}{6}$.

Exemple 05 :
Une urne contient six boules rouges, quatre boules blanches et deux boules noires. On tire au hasard et simultanément trois boules.
1) Calculer la probabilité des événements suivants
•A. Les trois boules sont rouges.
•B. les trois boules sont différentes.
•C. les trois boules sont de même couleurs.
•D. Tirer deux boules rouges parmi les trois boules.
•E. les deux premières boules sont noires.
2) Reprendre les mêmes questions dans le cas d'un tirage successif sans remise.

Corrigé :

Le nombre de cas possibles est: $C_{12}^{3}=220$

1) **Combinaison = tirage simultané**

1- $P\left(A\right)=\frac{C_6^3}{C_{12}^3}=\frac{120}{220}$ 2- $P\left(B\right)=\frac{C_6^1\times C_4^1\times C_2^1}{C_{12}^3}=\frac{48}{220}$

3- $P\left(C\right)=\frac{C_6^3+C_4^3}{C_{12}^3}=\frac{24}{220}$ 4- $P\left(D\right)=\frac{C_6^2\times C_6^1}{C_{12}^3}=\frac{90}{220}$

5- $P\left(E\right)=\frac{C_2^2\times C_{10}^1}{C_{12}^3}=\frac{10}{220}$

2) **Tirage successif sans remise: arrangement sans répétition**

Le nombre de cas possibles est $A_{12}^{3}=1320$

$$1-P\left(A\right)=\frac{A_6^3}{A_{12}^3}=\frac{120}{1320}\quad 2-P\left(B\right)=\frac{3A_6^1\times A_4^1\times A_2^1}{A_{12}^3}=\frac{144}{1320}$$

$$3-P\left(C\right)=\frac{A_6^3+A_4^3}{A_{12}^3}=\frac{124}{1320}\quad 4-P\left(D\right)=\frac{2A_6^2\times A_6^1}{A_{12}^3}=\frac{360}{1320}$$

$$5-P\left(E\right)=\frac{A_2^2\times A_{10}^1}{A_{12}^3}=\frac{20}{1320}$$

Probabilité conditionnelle, indépendance

Probabilité conditionnelle de A sachant B : (probabilité que A se réalise sachant que B se réalise). C'est une probabilité sur B.

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Indépendance de deux évènements A et B :

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B) \Rightarrow P(A \mid B) = \frac{P(A)\,P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Théorème de Bayes
pour deux évènements **A** et **B**:

$$P\left(A \mid B\right) = \frac{P\left(B \mid A\right) P\left(A\right)}{P\left(B\right)}$$

· Généralisation pour un système complet d'évènements $A_1, A_2, ..., A_n$:

$$P\left(B\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(B \mid A_i\right) P\left(A_i\right), \quad P\left(A_i \mid B\right) = \frac{P\left(B \mid A_i\right) P\left(A_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} P\left(B \mid A_i\right) P\left(A_i\right)}$$

Exemple 06 :

Un laboratoire pharmaceutique a réalisé des tests sur 800 patients atteints d'une maladie. Certains sont traités avec le médicament A, d'autres avec le médicament B.

Le tableau présente les résultats de l'étude :

	Médicament A	Médicament B	Total
Guéri	383	291	**674**
Non guéri	72	54	**126**
Total	**455**	**345**	**800**

1) On choisit au hasard un patient et on considère les évènements suivants :

A : « Le patient a pris le médicament A ».

G : « Le patient est guéri ».

Solution 06 :

La probabilité qu'un patient soit traité avec le médicament A est égale à $P(A) = \frac{455}{800}$

La probabilité qu'un patient soit guéri est égale à $P(G) = \frac{674}{800}$

La probabilité qu'un patient soit guéri et qu'il soit traité par le médicament A est égale à $P(G \cap A) = \frac{383}{800}$

La probabilité que le patient ait pris le médicament A sachant qu'il est guéri est égale à $P(A \mid G) = \frac{P(A \cap G)}{P(G)} = \frac{383}{674}$

La probabilité que le patient soit guéri sachant qu'il a pris le médicament B est égale à $P(G \mid B) = \frac{P(G \cap B)}{P(B)} = \frac{291}{345}$

Exercice 01

1- Dans un aquarium, il y a 3 poissons argentés, 2 poissons jaunes et 5 poissons noirs.
On pèche au hasard et simultanément trois poissons.
Calculer les probabilités des évènements suivants :
A : « Les trois poissons pêchés sont de la même couleur »
B : « pêcher au moins un poisson jaune »

Corrigé :

$$P\left(A\right)=\frac{C_3^3+C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{1+10}{120}=\frac{11}{120}$$

$$P\left(B\right)=\frac{C_2^1C_8^2+C_2^2C_8^1}{C_{10}^3}=\frac{64}{120}$$

Exercice 02

Une urne contient six boules rouges et quatre boules blanches. On tire au hasard et simultanément deux boules.

1) Calculer la probabilité des événements suivants

- a. les deux boules sont rouges,
- b. les deux boules sont blanches,
- c. les deux boules sont de même couleurs
- d.les deux boules sont de couleurs différentes.

2) Reprendre les questions si le tirage est successif et sans remise.