I. Intégrales et Primitives

I.1 Primitives d'une fonction continue.

Déf 1.1: Soit f une fonction de $[a,b] \longrightarrow IR$. On dit qu'une fonction dérivable F: $[a,b] \longrightarrow IR$ est une primitive de f si:

$$\forall x \in [a,b] : \mathrm{F}'(x) = f(x)$$

Pour faire simple, une primitive c'est « l'inverse de la dérivée ». La dérivée d'une fonction f se note f ', et généralement la primitive de f se note F. Par définition, f est la dérivée de F.

Rappel des dérivées

Tableau des dérivées

f	f'
$constante$	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n	$n \times x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$sin(x)$	$cos(x)$
$cos(x)$	$-sin(x)$
e^x	e^x
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$

Exemple 01:

Soient f et F deux fonctions définies sur $]-1;+\infty[$ comme suit :

$$f(x)=-\frac{2x^2+4x}{(x+1)^2} \quad , \quad F(x)=\frac{x-1}{x+1}-2x$$

Montrer que F est une primitive de f sur $]-1;+\infty[$.

Solution :

F est dérivable sur $]-1;+\infty[$,

$$F'(x)=\frac{1(x+1)-1(x-1)}{(x+1)^2}-2=\frac{2}{(x+1)^2}-2$$

$$F'(x)=\frac{2-2(x+1)^2}{(x+1)^2}=\frac{2\left[1-(x+1)^2\right]}{(x+1)^2}=\frac{2\left[(1-x-1)(1+x+1)\right]}{(x+1)^2}=\frac{-2x(x+2)}{(x+1)^2}$$

$$F'(x)=\frac{-2x^2-4x}{(x+1)^2}=-\frac{2x^2+4x}{(x+1)^2}=f(x)$$

Donc $F'(x)=f(x)$ **pour tout** $\in]-1;+\infty[$.

Théorème1.2: Si une fonction f admet une primitive *F* sur *[a,b],* alors f admet une infinité de primitive de la forme

F+C

Où *C* est une constante

Exemple 2:

$$f(x)=2x+1 \Rightarrow F(x)=x^2+x+c$$

Exemple 03:

Soit la fonction f définie sur R :

$$f(x) = 2x + \cos x$$

1- Donner toutes les primitives de f sur R.

2- Déterminer la primitive F de f sur R sur qui vérifie: $F(\pi) = -1$

Solution:

1- les primitives de f sur R sont : $F(x) = x^2 + sin\, x + c$

2- $F(\pi) = -1$ signifie que $\boldsymbol{\pi^2 - 0 + c = -1}$

$$\boldsymbol{c = -1 - \pi^2}$$

et

$$F(x) = x^2 + \sin x - 1 - \pi^2$$

Remarque: La plupart du temps, en mathématiques, on prend la constante **C** qui apparaît dans la primitive égale à 0.

Intégrales indéfinies

Déf 1 : L'ensemble de toutes les primitives de la fonction $f:[a,b] \longrightarrow IR$

est appelé intégrale indéfinie de f et

est noté $\int f(x)dx$

c-à-d

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Tableau des primitives

f	**F (LA PRIMITIVE)**
0	$constante$
1	x
x	$\frac{x^2}{2}$
x^2	$\frac{x^3}{3}$
x^3	$\frac{x^4}{4}$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$ln(x)$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$\frac{x^{-n+1}}{-n+1} = \frac{1}{(-n+1) \times x^{n-1}}$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
e^x	e^x
$sin(x)$	$-cos(x)$
$cos(x)$	$sin(x)$

Série d'exercices n° 05:

Exercice 01 :

Vérifier que F est une primitive de f sur l'intervalle I puis donner sa primitive sur I:

1- $F(x)=2\sqrt{x^2+1}$ $\quad I=R$, $\quad f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

2- $F(x)=x(\ln x-1)$ ، $\quad I=]0;+\infty[$, $\quad f(x)=\ln x$

3- $F(x)=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ ، $\quad I=R,$ $\quad f(x)=-2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

Exercice 02 :

Déterminer la primitives des fonctions suivantes sur $]0;+\infty[$:

$f(x)=x-\dfrac{1}{x^2}$ ، $g(x)=\dfrac{9}{x^4}$ ، $h(x)=-15x^2$, $k(x)=-10x^4+2x-1$,

، $F(x)=4-5x^3$ ، $G(x)=-2x^5+x^2-x+3$ ، $H(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{x}$ ، $K(x)=-\dfrac{3}{x^3}+1$, $L(x)=\frac{-1}{\sqrt{x}}$,
$I=]0;+\infty[$

Exercice 03 :

On considère la fonction définie sur I=$[4;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x^2-3x-4}{x-2}$

1) Trouver trois réels $a,b,$ et c tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$
2) En déduire une primitive de f sur $[4;+\infty[$