Chapitre 1

Résolution des systèmes linéaires

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution numérique des systèmes linéaires qui fait partie de l'analyse numérique matricielle. En effet, il y'a deux types de méthodes de résolution de systèmes linéaires : celles dites directes ; donnant la solution exacte après un nombre fini d'opérations élémentaires, et celles dites itératives ; engendrant une suite de solutions approchées qui converge vers la solution exacte, en se fixant une précision à atteindre.

D'une façon particulière on va présenter dans ce chapitre les deux méthodes directes les plus connues : méthode de Gauss et factorisation LU.

On verra dans les prochains chapitres que la résolution d'un problème d'optimisation linéaire revient à la recherche de la solution d'un système linéaire.

Soit le système d'équations linéaires suivant

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ...a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ...a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right. ,$$

$x_1, x_2, ...x_n$ sont les inconnues du système.

Le système précédent peut s'écrire sous forme matricielle $A.X = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix},$$

ou bien tout simplement en matrice augmenté du système.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}.$$

Les méthodes directes ont pour principe de transformer le système en question en un autre équivalent, ayant la même solution que l'original.

1.1 Systèmes à matrices particulières

Définition 1.1.1 *On appelle matrice diagonale toute matrice dont tout les éléments sont nuls sauf les éléments de la diagonale.*
Le terme général de la matrice vérifie $\forall i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$*, une matrice diagonale à la forme suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Un système ayant pour matrice de coefficients une matrice diagonale se résout directement par la résolutions des équations $a_{ii}x_i = b_i$.

Définition 1.1.2 *On appelle matrice triangulaire supérieure (resp inférieure) toute matrice dont les éléments qui se trouvent au dessous (au dessus) de la diagonale sont tous nuls.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \textit{triangulaire supérieure.}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & ... & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \textit{triangulaire inférieure.}$$

Si un système admet pour matrice de coefficients une matrice triangulaire, on peut le résoudre par substitutions successives, en commencent par l'équation $a_{nn}x_n$ (*resp* $a_{11}x_1$) si la matrice est triangulaire supérieure (resp inférieure).

1.2 Méthode d'éliminations de Gauss

L'idée principale de cette méthode est de se ramener à la résolution d'un système linéaire équivalent dont la matrice est triangulaire supérieure.

Remarque 1.2.1 *Dans cette méthode on a besoin de faire des transformations élémentaires sur les lignes (les colonnes) de la matrice augmenté du système. Ces transformations ne changent ni son ordre ni son rang.*

1. *La permutation de deux lignes.*
2. *La permutation de deux colonnes.*
3. *La multiplication d'une ligne par un scalaire.*
4. *La division par un même terme non nul les éléments d'une ligne.*
5. *Ajouter ou retrancher à une ligne un certain nombre de fois d'une autre ligne.*

1.2.1 Schéma de l'algorithme de la méthode de Gauss

La méthode comporte (n-1) itérations, on notera $a_{ij}^{(k)}$ l'élément a_{ij} et $b_i^{(k)}$ l'élément b_i de la matrice augmentée du système à l'étape k.

Etape n° =1 :

On transforme A en une matrice dont les termes sous diagonaux de la première colonne sont nuls.

Pour éliminer le terme a_{21} on multiplie la ligne l_1 par $\left(\frac{-a_{21}}{a_{11}}\right)$

$$l_2^{(1)} \leftarrow l_2 + \left(\frac{-a_{21}}{a_{11}}\right) l_1,$$

on obtient ainsi

$$\left(\begin{array}{c} a_{2j}^{(1)} = a_{2j} - \left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right) a_{1j} \\ b_2^{(1)} = b_2 - \left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right) b_1 \end{array} \right).$$

Pour éliminer le terme a_{31} on multiplie l_1 par $\left(\frac{-a_{31}}{a_{11}}\right)$

$$l_3^{(1)} \leftarrow l_3 + \left(\frac{-a_{31}}{a_{11}}\right) l_1,$$

on obtient ainsi

$$a_{3j}^{(1)} = a_{3j} - \left(\frac{a_{31}}{a_{11}}\right) a_{1j},$$
$$b_3^{(1)} = b_3 - \left(\frac{a_{31}}{a_{11}}\right) b_1,$$

D'une manière générale pour éliminer tout les termes a_{i1} on utilise la transformation

$$l_i^{(1)} \leftarrow l_i + \left(\frac{-a_{i1}}{a_{11}}\right) l_1,$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \left(\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right) a_{ij},$$
$$b_i^{(1)} = b_i - \left(\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right) b_1.$$

A la fin de la première étape le système d'équations aura la forme suivante

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .... & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & ... & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Etape n° =2 :

Nous éliminons ensuite les termes sous-diagonaux de la seconde colonne.

Comme à la première étape pour éliminer le terme a_{32} on doit utiliser la transformation

$$l_3^{(2)} \leftarrow l_3^{(1)} + \left(\frac{-a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\right) l_2^{(1)},$$

on obtient ainsi

$$a_{3j}^{(2)} = a_{3j}^{(1)} - \left(\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\right) a_{2j}^{(1)},$$
$$b_3^{(2)} = b_3^{(1)} - \left(\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\right) b_2^{(1)}.$$

À la fin de la seconde étape le système d'équations aura la forme suivante

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .... & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & ... & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & ... & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & ... & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Etape n° =k :

Pendant une étape k (k quelconque) Nous éliminons les termes sous-diagonaux de la $k-ième$ colonne

$$l_{k+1}^{(k)} \leftarrow l_{k+1}^{(k-1)} - \left(\frac{a_{k+1,k}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}\right) l_k^{(k-1)},$$

on obtient ainsi

$$a_{k+1,j}^{(k)} = a_{k+1,j}^{(k-1)} - \left(\frac{a_{k+1,k}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}\right) a_{k,j}^{(k-1)},$$

$$b_{k+1}^{(k)} = b_{k+1}^{(k-1)} - \left(\frac{a_{k+1,k}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}\right) b_k.$$

A la fin de la dernière étape on obtiendra une matrice triangulaire supérieure équivalente à la matrice de départ.

Remarque 1.2.2 *Les opérations précédentes supposent que les termes a_{kk} appelés pivots sont non nuls.*

Remarque 1.2.3 *Les pivots de valeurs proches de zéros amplifierons les erreurs d'arrondis.*

Exemple 1.2.1 *Cherchons la solution du système suivant en appliquant la méthode de Gauss.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

La matrice augmentée de ce système est donnée par

$$\begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

La première étape dans l'algorithme de Gauss consiste à annuler les termes sous-diagonaux de la $1^{\text{ère}}$ *colonne.*

$$\begin{array}{c} \\ l_2 \leftarrow l_2 - \frac{1}{2}l_1 \\ l_3 \leftarrow l_3 - \frac{1}{2}l_1 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

À la seconde étape, on annule les termes sous-diagonaux de la $2^{\text{ème}}$ *colonne.*

$$\begin{array}{c} \\ \\ l_3 \leftarrow l_3 - 3l_2 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

On obtient alors le système triangulaire suivant

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

En commençant par la dernière équation et par substitutions successives, on obtient la solution

$$x_3 = 4/7, x_2 = 4/7, x_1 = -9/7.$$

1.3 Méthode de factorisation LU

La méthode LU consiste à transformer la matrice A en un produit de deux matrices triangulaires inférieures et l'autre supérieure.

$$A = LU,$$

où L est une matrice réelle triangulaire inférieure (L pour lower en anglais) et U une matrice réelle triangulaire supérieure (U pour upper en anglais).

Une fois la décomposition effectué il faut résoudre deux systèmes à matrices triangulaires.

$$AX = b \Leftrightarrow LUX = b.$$

On résoudra d'abord le système

$$LY = b,$$

une fois Y trouvée on résoudra le second système

$$UX = Y.$$

Remarque 1.3.1 *La décomposition n'est pas unique, la méthode impose en général que la diagonale de U soit des 1.*

On peut calculer la factorisation LU d'une matrice A par identification de A au produit LU.

Où $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, L matrice triangulaire inférieure et U une matrice triangulaire supérieure, avec $\det U = 1$.

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 & .... & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & ... & 0 \\ ... & 0 & L_{33} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ L_{n1} & L_{n2} & ... & ... & L_{nn} \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} & .... & U_{1n} \\ 0 & 1 & U_{23} & ... & U_{2n} \\ ... & 0 & 1 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & U_{n-1,n} \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.3.1 Algorithme de la méthode LU

Etape1 : Détermination des coefficients de la $1^{ère}$ ligne de U.

$$U_{1j} = \frac{a_{ij}}{L_{11}}, \quad j = 2, ..., n.$$

Etape2 : Détermination des coefficients de la $1^{ère}$ colonne de L.

$$L_{i1} = a_{i1}, \quad i = 1, ..., n.$$

Etape3 : Détermination des coefficients de la $j^{ème}$ colonne de L.

$$L_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik}U_{kj}, \quad i = j+1, ..., n.$$

Etape3 : Détermination des coefficients de la $j^{ème}$ colonne de U.

$$U_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}U_{kj}}{L_{ii}}, \quad i = 2, ..., j.$$

Exemple 1.3.1 *Soit la matrice augmentée suivante à laquelle on applique la méthode de factorisation LU.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 6 & 4 & 0 & 26 \\ 8 & 5 & 1 & 35 \end{pmatrix}.$$

Cherchons d'abord la factorisation LU de la matrice du système en question par identification.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \\ 8 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} L_{11} & L_{11}U_{12} & L_{11}U_{13} \\ L_{21} & L_{22} + L_{21}U_{12} & L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23} \\ L_{31} & L_{32} + L_{31}U_{12} & L_{33} + L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \quad (1) \begin{cases} L_{11} = 2 \\ L_{21} = 6 \\ L_{31} = 8 \end{cases}, \qquad (2) \begin{cases} L_{11}U_{12} = 1 \\ L_{22} + L_{21}U_{12} = 4 \\ L_{32} + L_{31}U_{12} = 5 \end{cases},$$

$$(3) \begin{cases} L_{11}U_{13} = 2 \\ L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23} = 0 \\ L_{33} + L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} = 1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} L_{11} = 2 \\ L_{21} = 6 \\ L_{31} = 8 \end{cases},$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} L_{11}U_{12} = 1 \Rightarrow U_{12} = \dfrac{1}{2} \\ L_{22} + L_{21}U_{12} = 4 \Rightarrow L_{22} = 1 \\ L_{32} + L_{31}U_{12} = 5 \Rightarrow L_{32} = 1 \end{cases},$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} L_{11}U_{13} = 2 \Rightarrow U_{13} = 1 \\ L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23} = 0 \Rightarrow U_{23} = -6 \\ L_{33} + L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} = 1 \Rightarrow L_{33} = -1 \end{cases},$$

alors

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & -1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le problème maintenant revient à la résolution de deux systèmes simples avec deux matrices triangulaires.

$$LY = b \Rightarrow \begin{cases} 2y_1 = 10 \\ 6y_1 + y_2 = 26 \\ 8y_1 + y_2 - y_3 = 35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = -4 \\ y_3 = 1 \end{cases},$$

et

$$UX = Y \Rightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 5 \\ x_2 - 6x_3 = -4 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}.$$

où $(x_1, x_2, x_3) = (3, 2, 1)$ la solution du système d'origine.

1.4 Rappel sur les matrices

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée à valeurs réelles.

• Les **valeurs propres** de A sont les racines de son polynôme caractéristique

$$\det(A - \lambda I_n) = 0,$$

où $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité.

• Les **mineurs diagonaux principaux** de A sont les déterminants d'ordres 1, 2, 3, ..., n construits en commençant par les premières lignes et les premières colonnes de la matrice.

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$,on a

$D_1 = \det(a_{11}) = a_{11}$,

$D_2 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$,

$D_3 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$,

....

et $D_n = \det A$.

Définition 1.4.1 ***(matrice définie positive)*** *On dit qu'une matrice A est définie positive si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

i) toutes ses ***valeurs propres*** *sont strictement positives.*

ii) tous ses ***mineurs diagonaux principaux*** *sont strictement positifs.*

iii) $< Ax, x > > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $(x \neq 0)$.

Définition 1.4.2 ***(matrice semi-définie positive)*** *On dit qu'une matrice A est semi-définie positive si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

i) ses ***valeurs propres*** *sont positives ou nulles.*

ii) ses ***mineurs diagonaux principaux*** *sont positifs ou nuls.*

iii) $< Ax, x > \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Définition 1.4.3 ***(matrice définie négative)*** *On dit qu'une matrice A est définie négative si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

i) toutes ses ***valeurs propres*** *sont strictement négatives.*

ii) si son $k^{ième}$ ***mineur diagonal principal*** *est strictement négatif lorsque k est impair, et strictement positif lorsque k est pair.*

iii) $< Ax, x >< 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $(x \neq 0)$.

Définition 1.4.4 ***(matrice semi-définie négative)*** *On dit qu'une matrice A est semi-définie négative si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

i) toutes ses ***valeurs propres*** *sont négatives ou nulles.*

ii) si son $k^{ième}$ ***mineur diagonal principal*** *est négatif ou nul lorsque k est impair, et positif ou nul lorsque k est pair.*

iii) $< Ax, x >\leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Remarque : Une matrice qui n'est ni définie positive, ni semi-définie positive, ni définie négative, ni semi-définie négative est dite indéfinie.

Exemples :

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -1 < 0,\ \lambda_2 = 1 > 0.$

On conclut que A n'est pas définie.

2) $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$,

$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 6\text{-}\lambda & \text{-}3 \\ \text{-}3 & 6\text{-}\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 12\lambda + 27 = 0 \Longrightarrow$ $\lambda_1 = 3 > 0$, $\lambda_2 = 9 > 0$. Alors A est définie positive.

Ou bien par la méthode mineurs diagonaux principaux : $D_1 = 6 > 0, D_2 = 27 > 0$. Comme $D_1 > 0$ et $D_2 > 0$, on trouve que la matrice A est définie positive.