Corrigé de la série n°1 :

Exo 1 : a) f est définie si et seulement si $x > 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}^{+*} =]0,+\infty[$

condition pour la fct $\ln$.

(b) f est définie ssi : $x^3 + 1 \neq 0 \Rightarrow x^3 \neq -1 \Rightarrow x \neq -1$

Donc, $D_f = \mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$.

(c) f est définie ssi : $x^2 + 3x - 10 \geq 0$ (on étudie le signe de l'expression : ندرس إشارة)

$x^2 + 3x - 10 \geq 0$: $D = 9 + 40 = 49 > 0$

$\begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
$x^2+3x-10$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\Rightarrow D_f =]-\infty ; -5] \cup [2 ; +\infty[$

(d) f est définie ssi : $x^2 + 5x + 6 \neq 0$ $D = 25 - 24 = 1$

$\begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-3 ; -2\}$

$=]-\infty, -2[\cup]-2 ; -3[\cup]-3, +\infty[$

Exo 2 : (a) $= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{3x^2} = \dfrac{1}{3}$

(b) $= \dfrac{0}{0} = F.I$ $\therefore$ on factorise : نحلل إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى

$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow D = 25 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$.

$x^2 - 16 = (x-4)(x+4)$

$\Rightarrow = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\cancel{(x-4)}(x+1)}{\cancel{(x-4)}(x+4)} = \dfrac{5}{8}$.

(c) $= \dfrac{-3}{0} = \infty$

on étudie le signe du dénominateur : ندرس إشارة المقام

$-x^2 - 3x = 0$: $D = 9 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$-x^2-3x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} = \dfrac{-3}{+0} = -\infty$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} = \dfrac{-3}{-0} = +\infty$

multiplication par le conjoint :
الضرب في المرافق .

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} = FI$

$= \dfrac{(\sqrt{x^2-3x+1}-x)\sqrt{x^2-3x+1}+x}{\sqrt{x^2-3x+1}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x+1}{\sqrt{x^2-3x+1}+x} = FI = \lim \dfrac{\cancel{x}(-3x+\frac{1}{x})}{\cancel{x}\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}\right)}$

$= \dfrac{-\infty}{1} = -\infty$

e) $= \dfrac{0}{0} = FI = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cancel{x}}{2\cancel{x}} = \dfrac{3}{2}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} = \dfrac{0}{0} = FI = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\sin(x^2)}{x^2}\cdot x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(x) = 0$

à l'aide de la propriété suivante : $\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{\sin a}{a} = 1$

Exo3 : $f(x) = |4x-5| = \begin{cases} -4x+5 & \text{si } x \leq \frac{5}{4} \\ 4x-5 & \text{si } x > \frac{5}{4} \end{cases}$

sur $]-\infty, \frac{5}{4}[$: f est continue car $-4x+5$ est toujours continue خواص الدوال التي الدرجة 1.

sur $]\frac{5}{4}, +\infty[$: " " " " $4x-5$ est toujours continue.

la continuité au point $\frac{5}{4}$: nous avons : $f(\frac{5}{4}) = |4(\frac{5}{4})-5| = |-5| = 5$.

a- La continuité à gauche de $\frac{5}{4}$:

$\lim\limits_{x \leq \frac{5}{4}} f(x) = 5 = f(\frac{5}{4}) \Rightarrow f$ est continue à gauche de $\frac{5}{4}$.

b- à droite de $\frac{5}{4}$: $\lim\limits_{x \geq \frac{5}{4}} f(x) = -5 \neq f(\frac{5}{4}) \Rightarrow f$ n'est pas continue à droite de $\frac{5}{4}$.

$\Rightarrow f$ n'est pas continue au poin $\frac{5}{4}$.

$\Rightarrow f$ est continue sur $\mathbb{R} - \{\frac{5}{4}\}$.

② $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 4x}{x} & ; x \neq 0 . \\ f(0) = 4 \end{cases}$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{x} = \dfrac{0}{0} = FI$

$= \lim\limits_{x \to 0} 4 \cdot \underbrace{\dfrac{\sin 4x}{4x}}_{1} = 4 \cdot 1 = 4 = f(0) \Rightarrow$ f est continue au point 0. (I)

• sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$: $\mathbb{R} - \{0\}$: f est continue car $\sin 4x$ est continue et x aussi est continue ; donc le rapport est continue . . . (II) → خواص الدالة $\sin x$ والدوال كثيرات الحدود

nous avons (I) et (II) : f est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 04 : f est continue sur $]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$: car elle est un polynôme (كثير حدود).

La continuité au point 2 :

il faut que f soit continue à gauche de 2

+

et à droite de 2 :

× à gauche de 2 : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = 6 + b \overset{?}{=} f(2) = a$.

à droite de 2 : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = 4b + 9 \overset{?}{=} a = f(2)$

جملة معادلتين بمجهولين a و b :

$\begin{cases} 6 + b = a \Rightarrow b - a = 6 \\ 4b + 9 = a \Rightarrow 4b - a = 9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ ① - ② : $b - a - 4b + a = 6 - 9$

$-3b = -3 \Rightarrow \boxed{b = -1}$

$\Rightarrow \boxed{a = b - 6 = -1 - 6 = -7}$

Exo 5 : ① $f'(x) = (tg\, x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$

② $f'(x) = (2x+6)' \cos(2x+6) + (3x+1)'(-\sin(3x+1))$
$= 2 \cos(2x+6) - 3 \sin(3x+1)$.

③ $f'(x) = (\ln(\underbrace{\ln x}_{v}))' = (\ln v)' = \dfrac{v'}{v} = \dfrac{1/x}{\ln x} = \dfrac{1}{x \ln x}$.

④ $f'(x) = \left(\sqrt[3]{x^3 + 2}\right)' = \left((x^3+2)^{1/3}\right)' = (v^n)' = \dfrac{1}{3} \cdot (x^3+2)^{-2/3} \cdot 3x^2 = \dfrac{x^2}{(x^3+2)^{2/3}}$.

⑤ $f'(x) = \left(\sqrt{x + \sqrt{x}}\right)' = \left(\sqrt{\mu}\right)' = \dfrac{(x + \sqrt{x})'}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} = \dfrac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}$

$= \dfrac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

3